ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտություններ, սերիա XXX, № 1, 1977 Серия технических наук

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Р. П. ДЖАВАХЯН

СИНТЕЗ ЗУБЧАТО-РЫЧАЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ ПО ЭКСТРЕМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЯМ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ И УСКОРЕНИЯ ВЕДОМОГО ЗВЕНА

Рассмотрим зубчато-рычажный четырехколесный механизм, полученный на базе четырехшарнирного механизма, все постоянные и переменные размеры которого отнесем к радиусу R_c начальной окружности ведомого колеса (рис. 1). Обозначим относительные размеры базисного механизма через $OA = l_1$, $AB = l_2$, $BC = l_3$, $OC = l_0$, а относительные радиусы колес — через r_0, r_a, r'_a, r_b, r'_b, $r_c = 1$. Точки P_1, P_2 и P_3 являются полюсами зацепления колес.

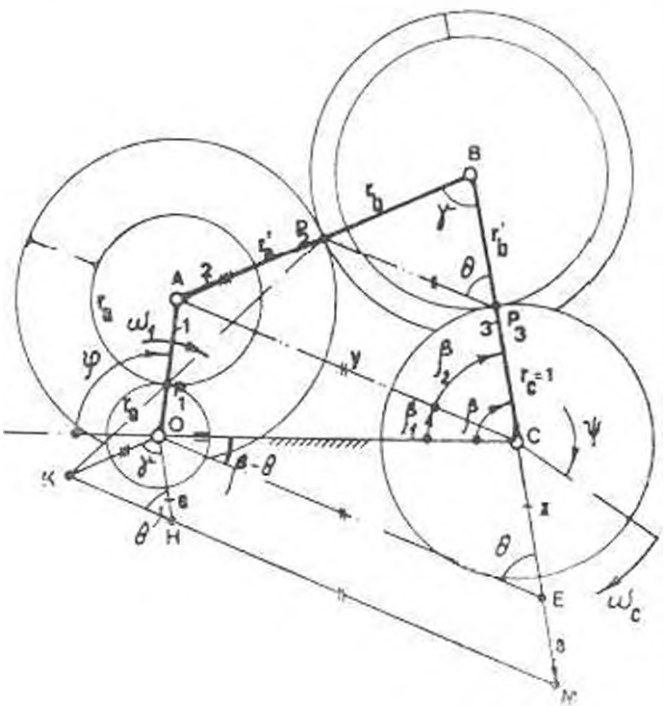

Рис. 1.

Для графического определения угловой скорости ω_c ведомого колеса такого механизма [1] проводим P_2K до пересечения с прямой $OK \parallel AB$ в точке K. Из полученной точки K проводим $KM \parallel P_2P_3$ до

пересечения с осью BC звена 3 в точке M. Вектор P_3M изображает повернутую на 90° в сторону вращения ведущего кривошипа 1 скорость полюса зацепления P_3, построенную в масштабе кривошипа. Тогда, принимая для удобства $\mu_1 = 1$, из выражения $\omega_2 R_2 = \omega_1 \cdot P_3M = \omega_1 (R_c + EM + CE)$ для аналога угловой скорости ведомого колеса находим

$$\varphi' = \frac{\omega_2}{\omega_1} = 1 + e + x. \tag{1}$$

Параметры $e = EM/R_c$ и $x = CE/R_c$, входящие в (1), положительны, когда точки M и E находятся вне отрезка BC. Легко убедиться, что длины отрезков OK и $OH = EM$ для рассматриваемого механизма постоянны и не зависят от его положения. В самом деле, из условий $\triangle OKP_1 \propto \triangle AP_2P_1$ и $OKH \propto BP_2P_3$ для зубчато-рычажного механизма с внешними зацеплениями имеем

$$e = r_a \frac{r_a' r_b}{r_a r_b'}. \tag{2}$$

Найдем величину переменного параметра x. Из $\triangle OCE$ и $\triangle BP_2P_3$ соответственно имеем:

$$x = l_0 (\sin\beta \operatorname{ctg}\delta - \cos\beta); \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg}\delta = \frac{\lambda - \cos\gamma}{\sin\gamma}, \tag{4}$$

где $\lambda = r_b'/r_a$. Кроме того, имеем:

$$\sin\beta_1 = \frac{l_1 \sin\gamma}{y}; \qquad \sin\beta_2 = \frac{l_2 \sin\gamma}{y}; \tag{5}$$

$$\cos\beta_1 = \frac{l_0 + l_1\cos\gamma}{y}; \qquad \cos\beta_2 = \frac{l_2 - l_0\cos\gamma}{y}. \tag{6}$$

где y—относительная длина переменного отрезка AC, определяемая по формуле

$$y^2 = l_0^2 + l_1^2 - 2l_0l_1\cos\gamma = l_2^2 + l_3^2 - 2l_2l_3\cos\gamma_1,$$

откуда для угла передачи γ находим:

$$\cos\gamma = p - q\cos\gamma_1, \tag{7}$$

где

$$p = \frac{l_2^2 - l_3^2 - l_1^2 - l_0^2}{2l_0l_1}; \qquad q = \frac{l_2l_3}{l_0l_1}. \tag{8}$$

Подставляя в (3) значения δ и $\beta = \beta_1 + \beta_2$ из (4), (5) и (6), с учетом (7) получим

$$x = \frac{l_0}{l_2^2 + l_1^2 + 2l_0 l_1 \cos\varphi}\left|\frac{m\sin\varphi + n\sin 2\varphi}{\sqrt{1-(p-q\cos\varphi)^2}} + (l_2 - l_3)(l_0 + l_1\cos\varphi)\right|,$$

где (9)

$$m = l_1[(l_3 + l_2) - p(l_3 + l_1)]; \qquad n = 0{,}5ql_1(l_2 + l_3). \tag{10}$$

Из (1) для аналога ψ'' углового ускорения ведомого колеса имеем $\psi'' = x'$ и после подстановки значения x', найденного из (9), находим

$$\psi'' = l_0\frac{f_0 + f_1\cos\varphi + f_2\cos^2\varphi + f_3\cos^3\varphi + f_4\cos^4\varphi + f_5\sin\varphi[1-(p-q\cos\varphi)^2]^{1/2}}{(l_0^2 + l_1^2 + 2l_0l_1\cos\varphi)^2\,|1-(p-q\cos\varphi)^2|^{1/2}},$$

где значения постоянных коэффициентов связаны с параметрами механизма равенствами (8), (10) и

$$\left.\begin{aligned}
f_0 &= m\,|pq(l_0^2 + l_1^2) - 2l_0l_1(1-p^2)| - 2n(l_0^2 - l_1^2)(1-p^2),\\
f_1 &= m\,|6pql_0l_1 + (l_0^2 - l_1^2)(1-p^2-q^2)| - 2n(l_0^2 + l_1^2)pq,\\
f_2 &= m\,|pq(l_0^2 + l_1^2) - 4l_0l_1q^2| + 4n\,|pql_0l_1 - (l_0^2 - l_1^2)(1-p^2)|,\\
f_3 &= -2mpql_0l_1 + 2n\,|3pq(l_0^2 + l_1^2) + 2l_0l_1(1-p^2-q^2)|,\\
f_4 &= 2mq^2l_0l_1 + 2nq\,|2pl_0l_1 - q(l_0^2 + l_1^2)|,\\
f_5 &= l_1(l_3 - l_2)(l_0^2 - l_1^2).
\end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Исследование функции $\psi'(\varphi) = x'(\varphi)$ на экстремум приводит к уравнению восьмой степени относительно $\cos\varphi$

$$\sum_{i=0}^{8} h_i\cos^i\varphi = 0, \tag{12}$$

в котором коэффициенты h_i связаны с постоянными параметрами механизма формулами (11) и

$$\left.\begin{aligned}
h_0 &= f_2^2 - f_5^2(1-p^2)^2, \qquad h_1 = 2f_0f_3 - 6f_5^2pq(1-p^2),\\
h_2 &= f_1^2 + 2f_0f_2 + f_5^2(1-p^2)\,|(1-p^2)^2 + 3q^2(1-5p^2)|,\\
h_3 &= 2f_0f_3 + 2f_1f_2 + 2f_5^2pq\,|3(1-p^2) - 2q(3-p^2)|,\\
h_4 &= f_3^2 + 2f_0f_4 + 2f_1f_3 + 3f_5^2q^2\,|p^2(5-5p^2) - q^2(1-5p^2) - 1|,\\
h_5 &= 2f_1f_4 + 2f_2f_3 + 2f_5^2pq^2(10p^2 - 3q^2 - 6),\\
h_6 &= f_3^2 + 2f_2f_4 + f_5^2q^2(q^2 - 15p^2 - 3),\\
h_7 &= 2f_3f_4 + 6f_5^2pq^3, \qquad h_8 = f_4^2 - f_5^2q^4.
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Сложность функций (12) и (13) затрудняет решение задачи синтеза зубчато-рычажных механизмов по экстремальным значениям аналога угловой скорости ведомого звена.

Рассмотрим семейство зубчато-рычажных механизмов, в которых соблюдается условие

$$x = \frac{r_b'}{r_b} = \frac{l_2}{l_2'} = \frac{r_c}{r_c'}. \tag{14}$$

Для таких механизмов выражения (9), (12) и (13) сильно упрощаются, и становится возможным решение вышеуказанной задачи синтеза.

Для механизмов рассматриваемого семейства имеем $P_2P_3 \parallel AC$, $\delta = \beta_2$ (рис. 1) и аналогично (9) получим

$$x = \frac{l_0 l_1}{l_2} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}. \tag{15}$$

откуда с учетом выражения $\gamma' = -q\sin\varphi/\sin\gamma$, полученного из (7), находим

$$\psi'' = \frac{l_0 l_1}{l_2} \cdot \frac{pq\cos^2\varphi + (1 - p^2 - q^2)\cos\varphi - pq}{\sin^3\gamma}, \tag{16}$$

где значение угла γ определяется по формуле (7).

Условие экстремума $\psi'' = 0$ в этом случае принимает вид

$$\cos^2\varphi + g\cos\varphi - 1 = 0, \tag{17}$$

где

$$g = \frac{1 - p^2 - q^2}{pq}. \tag{18}$$

Анализ выражения (18) с учетом (8) показывает, что независимо от размеров четырехзвенного механизма, дискриминант уравнения (17) положителен и (17) имеет два действительных корня, произведение которых равно 1. Следовательно, (17) имеет только один возможный корень $|\cos\varphi| < 1$, которому соответствуют два значения

$$\varphi = \varphi_1 \quad \text{и} \quad \varphi = 2\pi - \varphi_1 \tag{19}$$

угла поворота ведущего кривошипа, т. е. положения кривошипа, соответствующие экстремальным значениям ψ', симметричны относительно стойки. При известном φ_1 экстремальные значения ψ' определяются по формуле

$$\psi'_{\text{экс}} = 1 + e - \frac{l_0 l_1}{l_2} \cdot \frac{\sin\varphi_1}{\sqrt{1 - (p - q\cos\varphi_1)^2}}, \tag{20}$$

полученной из (1) и (15) с учетом (7).

Найдем теперь положения механизмов рассматриваемого семейства, соответствующие экстремальным значениям аналога углового ускорения ψ'' ведомого звена. Из (16) для аналога углового ускорения ведомого звена находим

$$\psi''' = \frac{l_0 l_1}{l_2} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sin^3\gamma} [S_0 - S_1\cos\varphi + S_2\cos^2\varphi + \cos^3\varphi], \qquad (21)$$

где

$$S_0 = \frac{p}{q}(2 - p^2) + \frac{q}{p}(1 + 2p^2) - \frac{1}{pq}, \qquad S_3 = -q^2,$$

$$S_1 = p^2 - 4q^2 - 1, \qquad S_2 = \frac{p}{q}(p^2 - 2q^2 - 2).$$

Значения p и q определяются по (8). Анализ показывает, что кубическое уравнение, входящее в (21), не имеет действительных корней в интервале $-1 \leqslant \cos\varphi \leqslant 1$, аналог углового ускорения ψ'' достигает своих экстремальных значений в положениях ($\sin\varphi = 0$)

$$\varphi_0 = 0, \qquad \varphi_2 = \pi, \qquad (22)$$

когда ведущий кривошип располагается на линии стойки.

Для экстремальных значений аналога углового ускорения ведомых колес механизмов рассматриваемого семейства из (16), (18) и (17) находим:

$$\psi''_{\max} = \frac{ql_3}{\sin\gamma_{\min}} = \frac{ql_3}{\sqrt{1 - (p-q)^2}},$$
$$\psi''_{\min} = -\frac{ql_3}{\sin\gamma_{\max}} = -\frac{ql_3}{\sqrt{1 - (p+q)^2}}, \qquad (23)$$

где $\gamma_{\max}$ и $\gamma_{\min}$ — экстремальные значения угла передачи (рис. 2).

Следует отметить, что все полученные формулы справедливы как для четырехколесных, так и для трехколесных зубчато-рычажных механизмов, для которых соблюдается условие (11).

Для определения углового хода $\psi = 2\pi i_{12}$ ведомого звена необходимо знать среднее значение его угловой скорости $\psi'_{ср}$, которое можно найти по очевидной формуле

$$\psi'_{ср} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi' d\varphi,$$

которая с учетом (11) принимает вид

$$\psi'_{ср} = 1 + e + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x d\varphi.$$

Подставляя значение x из (15) и интегрируя с учетом (7) и (8), получим:

$$\psi'_{ср} = 1 + e - \frac{l_3}{q\pi}\arcsin(q\cos\varphi - p)\Big|_0^{2\pi} = 1 + e, \qquad (24)$$

Значение постоянного параметра e для четырехколесных механизмов с внешним зацеплением колес определяется по формуле (2). Для трехколесных механизмов $r_0 = 0$, $e = 0$ и $\psi'_{cp} = 1$.

Из (1), (15) и (24) следует, что $\psi' = \psi'_{cp}$ в положениях, когда $x = 0$, $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$. Следовательно, в положениях $\varphi = 0$ и $\varphi = \varphi_1$ угловые ускорения ведомых колес механизмов рассматриваемого семейства экстремальны, а текущее значение угловой скорости совпадает со средним ее значением за один оборот ведущего кривошипа (рис. 3).

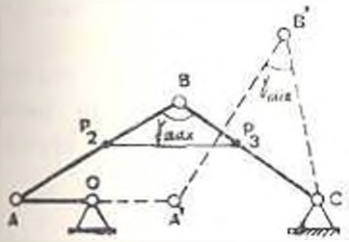

Рис. 2

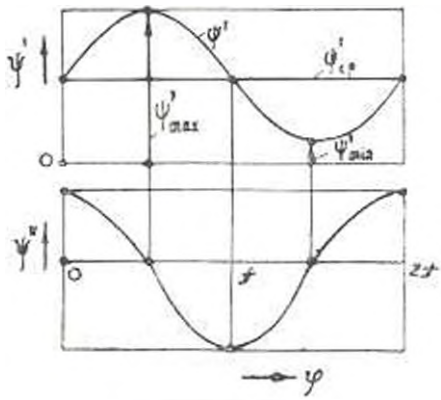

Рис. 3

Рассмотрим задачу синтеза зубчато-рычажного механизма (рис. 1), если заданы: среднее ψ'_{cp} и максимальное ψ'_{max} значения аналога угловой скорости ведомого колеса, угол φ_1, определяющий положение механизма при $\psi' = \psi'_{max}$, и максимальное значение ψ''_{max} аналога углового ускорения ведомого колеса при $\varphi = 0$.

Из (20), (24) с учетом (8) и (17) для $\varphi = \varphi_1$ имеем:

$$g = \frac{1 + \cos^2 \varphi_1}{\cos \varphi_1}; \tag{25}$$

$$\psi'_{max} = \psi'_{cp} + \frac{q l_2 \sin \varphi_1}{1 - (p - q \cos \varphi_1)^2}. \tag{26}$$

Совместное решение (18), (23) и (26) дает:

$$p = (1 + k^2 - kg)^{-0.5}; \quad q = kp; \quad l_2 = \frac{\psi'_{max}}{q} \sqrt{1 - (p - q)^2}, \tag{27}$$

где

$$k = \frac{1 - \left| \dfrac{\psi'_{max}(1 - \cos \varphi_1)}{\psi'_{max} - \psi'_{cp}} \right|^2}{\cos \varphi_1}, \tag{28}$$

а g определяется по формуле (25).

Размеры четырехшарнирного механизма найдем по формулам

$$b = \frac{pl_0l_3 + \sqrt{(pl_0l_3)^2 + (l_0^2 - l_3^2)(l_0^2 - q^2l_3^2)}}{l_0^2 - q^2l_3^2} \quad \text{и} \quad l_2 = \frac{ql_2l_3}{l_0}, \tag{29}$$

полученным из выражений (8). Значение относительного размера стойки можно выбрать по условию проворачиваемости базисного четырехшарнирного механизма.

Для рассматриваемого семейства механизмов формула (2) с учетом (14) и (24) принимает вид

$$e = \frac{r_0}{r_a} = \psi'_{ср} - 1, \tag{30}$$

где $l_1 = r_0 - r_a$.

Значения относительных радиусов колес находим из равенства (14), (28) и (30).

Если при синтезе вместо φ_1 потребовать соблюдение условия $l_3 = 2$, то в полученном механизме колеса будут попарно равны ($r'_0 = r_a = 0{,}5l_3$ и $r'_a = r_2 = 0{,}5l_1$). В этом случае значение φ_1 определяется по формуле

$$\cos\varphi_1 = 1 - \frac{2(\psi'_{max} - \psi'_{ср})}{\psi'_{max}\sqrt{1 - (\psi'_{max} - \psi'_{ср})^2}}. \tag{31}$$

полученной из (23) и (26), а выражение для определения промежуточного параметра k с учетом (31) принимает вид:

$$k = \frac{\psi'_{max}(\psi'_{max} - \psi'_{ср})^2}{2(\psi'_{max} - \psi'_{ср})\sqrt{4 - (\psi'_{max} - \psi'_{ср})^2} - \psi'_{max}[4 - (\psi'_{max} - \psi'_{ср})^2]}. \tag{32}$$

Следует отметить, что приведенная методика решения задачи синтеза зубчато-рычажных механизмов применима, когда заданы любые два параметра из ψ'_{max}, $\psi'_{ср}$ и ψ'_{min}, связанных равенством $\psi'_{ср} = 0{,}5(\psi'_{max} + \psi'_{min})$.

Пример. Спроектировать зубчато-рычажный механизм при следующих входных параметрах синтеза: $\varphi_1 = 97°$, $\psi'_{max} = 2{,}7$, $\psi'_0 = 1{,}55$ (т. е. $\psi'_{min} = 0{,}4$) и $\psi'_{max} = 1{,}25$.

Из (25) и (28) соответственно находим $g = 8{,}127378366$ и $k = 3{,}996024971$. Из (27) имеем $p = 0{,}141076665$, $q = 0{,}563745876$ и $l_3 = 2{,}009513651$. Принимаем $R_0 = 60$ *мм*, $l_0 = 160$ *мм*. Тогда $l_0 = 2{,}7$, и из (29) находим $l_2 = 2{,}360255262$ и $l_1 = 0{,}990306317$. Если вместо $\varphi_1 = 97°$ потребовать $l_3 = 2$, из (31) находим $\varphi_1 = 97{,}09°$, из (32) находим $k = 3{,}978997176$ и повторив расчет приходим к следующим результатам:

$$g = 8{,}157677287; \quad p = 0{,}142433678; \quad q = 0{,}566743204;$$

$$l_2 = 2{,}373982767; \quad l_1 = 0{,}996621185; \quad r_a = r'_0 = 1{,}0;$$

$r_b = r'_a = 1{,}186991384;\quad r_a = 0{,}642981403;\quad r_0 = 0{,}353639775.$

Полученный механизм показан на рис. 1.

Для зубчато-рычажного механизма, в котором отсутствуют колеса z_0 и z_a, имеем:

$$\psi_{cp} = 1,\quad \psi_{max} = 2{,}55 \quad \text{и} \quad \psi_{min} = -0{,}55.$$

Если для рассматриваемого семейства зубчато-рычажных механизмов потребовать выполнение условия

$$l_2^2 - l_3^2 = l_1^2 - l_0^2, \tag{33}$$

то из (18) с учетом (8) найдем $g = \dfrac{l_1}{l_0} + \dfrac{l_0}{l_1}$, и корнями уравнения (17) будут

$$\cos\varphi_1 = -\frac{l_1}{l_0} \quad \text{и} \quad \cos\varphi_2 = -\frac{l_0}{l_1}. \tag{34}$$

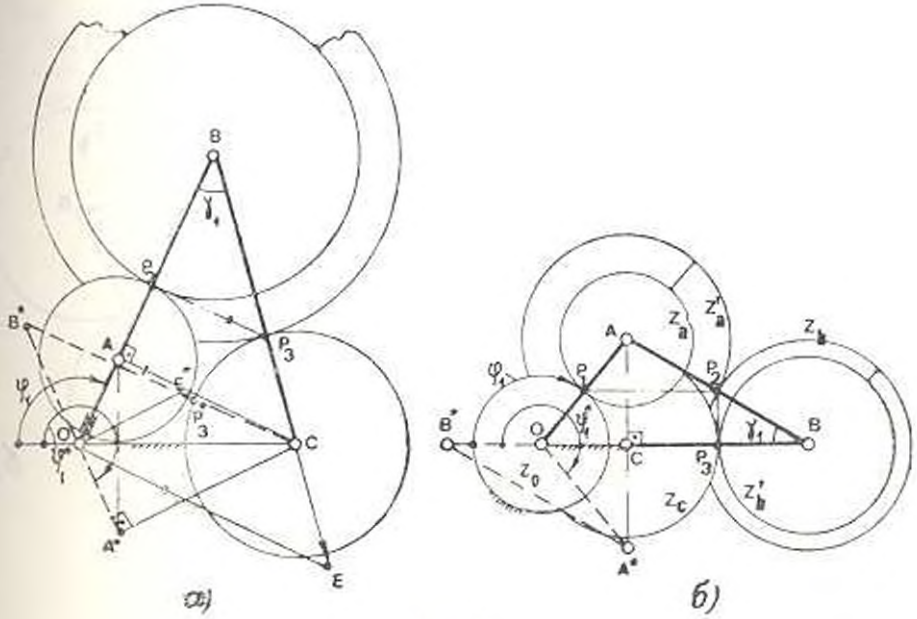

Рис. 4.

Формулы (34) справедливы соответственно для коромыслового и двухкривошипного базисных механизмов (рис. 4). В первом случае при $\psi' = 0$ базисный механизм находится в своих крайних положениях, во втором — ведомый кривошип расположен на линии стойки. Экстремальные значения ψ' для указанных механизмов будут определяться соответственно по формулам:

$$\psi'_{max} = 1 + \frac{r_a}{r_b} = \frac{l_1 l_3}{l_2^2}; \tag{35}$$

$$\psi'_{экс} = 1 \pm \frac{r_0}{r_a} \pm l_0, \tag{36}$$

полученным из (1), (2), (15), (19) и (31), имея в виду, что в рассматриваемых положениях $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\gamma_1} = \frac{l_3}{l_0}$ (рис. 4, *а*) и $\frac{\sin\varphi_1}{\sin\gamma_1} = \frac{l_1}{l_1}$ (рис. 4,*б*). В формулах (35) и (36) верхние знаки соответствуют максимальным, нижние — минимальным значениям ψ'.

Если для двухкривошипного механизма кроме ограничений (14) и (33) потребовать еще выполнение условия $P_2P_1 \parallel BO$ (рис. 4, *б*), то (36) принимает вид:

$$\psi'_{экс} = l_1 \pm l_0.$$

Все полученные результаты справедливы и для трехколесных зубчато-рычажных механизмов, в которых отсутствуют колеса z_b и z_a, и во всех формулах необходимо принять $r_b = 0$, $r = 0$.

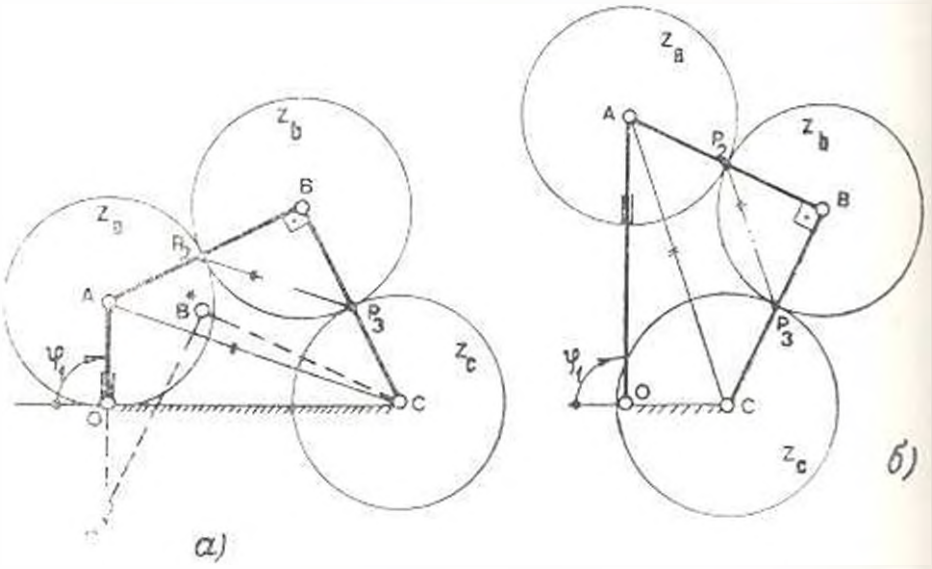

Рис. 5

Если для трехколесного зубчато-рычажного механизма, кроме ограничения (14) потребовать еще выполнение условий $l_2 = l_3$ и $l_1^2 = l_0^2 = 2l_2^2$ (т. е. $\gamma_1 = 90°$, рис. 5, *а*), то получим механизм, рассмотренный в работе [2]. Для механизмов, показанных на рис. 5, имеем $\gamma_1 = 90°$, $\varphi_1 = 270°$ и аналогично (35), (36) находим $\psi'_{экс} = 1 \pm l_0 l_1 / l_2$.

Поступило 15.III.1977

Ս. Գ. ՋԱՎԱՀՅԱՆ

ԱՏԱՄՆԱ-ԼԾԱԿԱՅԻՆ ՄԵԽԱՆԻԶՄՆԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶ ԸՍՏ ՏԱՐՎՈՂ ՕՂԱԿԻ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՐԱԳԱՑՄԱՆ ԷՔՍՏՐԵՄԱԼ ԱՐԺԵՔՆԵՐԻ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում տրվում է հարթ ատամնա-լծակային մեխանիզմների էքստրե-մալ արագությունների որոշման խնդրի լուծումը։

Դիտվում է նշված մեխանիզմների մի համախումբ, որոնց նախագծումը կատարվում է ըստ տարվող ատամնանիվի միջին ու մաքսիմալ արագության և մաքսիմալ արագացման արժեքների։

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Tolle O.* Geschwindigkeiten in Zahnradkurbelgetrieben. Das Industrieblatt, 1960, Bd. 60, № 12.
2. *Volmer J.* Die Konstruktion einfacher Räderkurbelgetriebe. Maschinenbautechnik, 1955, Jg. 4. H. 11.