

МАШИНОСТРОЕНИЕ

К. Х. ШАХБАЗЯН, Л. А. ТЖАГАЦЯНЦ, Г. С. ХУДОЯН

К СИНТЕЗУ МЕХАНИЗМОВ НА ОСНОВЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ
СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ПУЧКАМИ, СООТВЕТСТВЕННЫЕ
ПРЯМЫЕ КОТОРЫХ ОБРАЗУЮТ ПОСТОЯННЫЙ УГОЛ

В работе [1] дан метод синтеза направляющих механизмов на основе определенных соответствий между двумя плоскими пучками, соответственные прямые которых параллельны. В данной статье дается метод синтеза точных механизмов для воспроизведения кривых высших порядков на основе определенных соответствий между двумя плоскими пучками, соответственные прямые которых образуют произвольный постоянный угол β .

Пусть имеем два плоских пучка* S и S_1 (рис. 1, а), соответственные прямые которых образуют постоянный угол β . Пучок S_1 ограничен плоской кривой $\varphi_1(\rho, \alpha) = 0$, и текущая точка A является точкой пересечения кривой $\varphi_1(\rho, \alpha) = 0$ с i -й прямой пучка S_1 . Требуется найти $\varphi(\rho, \alpha) = 0$ — геометрическое место точек B пучка S , которые удалены от соответственных точек пучка S_1 на постоянную величину a ($AB = a$).

Для определения положения точки B на i -й прямой пучка S из точки A радиусом a засекаем соответствующую прямую пучка S . При этом отрезок SB представляет собой радиус-вектор ρ кривой $\varphi(\rho, \alpha) = 0$.

Для аналитического определения радиуса-вектора ρ произведем следующие вспомогательные построения. Из центра пучка S проведем прямую SQ , образующую с прямой SB угол β , т. е. $SQ \parallel S_1A$. Из точки A проведем прямую, параллельную направлению SS_1 до пересечения с прямыми SB и SQ соответственно в точках D и K .

Согласно рис. 1, а $SB = SD + DB = \rho$.

Из $\triangle ADB$

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2 - 2(AD) \cdot (BD) \cos \alpha, \quad (1)$$

где

$$AB = a; \quad BD = \rho - SD, \quad (2)$$

$$AD = c - DK, \quad (3)$$

* Пучки S и S_1 условно показаны посредством одной пары соответственных прямых SN и S_1N .

Из SKD

$$DK = r_1 \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad (4)$$

$$SD = r_1 \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}, \quad (5)$$

Решая (1)–(5) относительно r , получим*

$$r = r_1 \cos \beta + c \cos \alpha - \sqrt{a^2 - (c \sin \alpha - r_1 \sin \beta)^2}, \quad (6)$$

где a , c и β — постоянные параметры; r_1 — свободный и переменный радиус-вектор, законом изменения которого можно варьировать; α — полярный угол (полюс находится в центре пучка S).

Выражение (6) является полярным уравнением кривой $\varphi(r, \alpha) = 0$. От закона изменения r_1 и постоянных параметров a , c и β зависит тип воспроизводимой кривой.

Зависимость (6) можно воспроизвести механизмом, в основе которого лежит кинематическая схема, изображенная на рис. 1,б, где приняты следующие обозначения:

$$SS_1 = c; \quad AB = a; \quad SB = c; \quad SA = r_1.$$

Указанный механизм является семизванным и обладает двумя степенями свободы, что дает возможность в качестве траектории точки A выбрать произвольную плоскую кривую $\varphi(r_1, \alpha) = 0$.

Механизм, изображенный на рис. 1,б, состоит из звена 1 с треугольным контуром, две стороны которого образуют угол β , опирающийся на данный отрезок SS_1 , втулок 2 и 3, вращающихся вокруг концов (центры пучков S, S_1) данного отрезка, втулок 4 и 5, скользящих по сторонам жесткого угла β , и стержня 6, исходящего во вращательные пары со втулками 4 и 5. Таким образом, полученный механизм содержит четыре поступательные пары, число которых можно сократить до двух.

Траекторией точки A является геометрическое место вершины постоянного угла β , опирающегося на данный отрезок SS_1 , т. е. окружность. Центр этой окружности O совпадает с вершиной равнобедренного треугольника, построенного на отрезке SS_1 (рис. 1,а), с углом между бедрами 2β . При этом вершина $O \triangle SOS_1$ и точка A будут располагаться относительно отрезка SS_1 в одну сторону, если $\beta < 90^\circ$, и в разные стороны при $\beta > 90^\circ$. Из сказанного следует, что расстояние между точками O и A — величина постоянная, и их можно соединить жестким звеном 5 (посредством пар вращений). Звено 6 относительно звена 1 (рис. 1,б) совершает эллиптическое движение. Следовательно, в плоскости звена 6 имеется единственная точка D (рис. 1,а), которая движется по окружности относительно точки A (звена 1). Точка D бу-

* В дальнейшем учтен только положительный знак перед корнем.

дет вершиной равнобедренного треугольника ADB с углом при вершине D , равном β . Относительно отрезка AB точки D и N располагаются по одну сторону для $\beta < 90^\circ$ и в разные стороны при $\beta > 90^\circ$.

Присоединив точки D и N звеньем 6 и 1 жестким звеном 4, получим механизм (рис. 1, в) с двумя поступательными парами, состоящий из стержня 1, втулки 2, входящей в вращательную пару со стойкой в точке S_1 (центр пучка S_1), втулки 3, скользящей по звену 1, стержней 4 и 5 и трехшарнирного звена 6, образующего с другими звеньями только вращательные пары. Механизм, изображенный на рис. 1, в, также обладает двумя степенями свободы ($W=2$), т. е. точку A можно перемещать по произвольной плоской кривой $\varphi_1(r_1, \alpha) = 0$.

Рассмотрим два частных случая изменения свободного переменного r_1 .

1. $\varphi_1(r_1, \alpha) = 0$ — прямая $t-t_1$ и перпендикуляр h , опущенный с центра пучка S_1 на $t-t_1$, составляет с направлением SS_1 угол γ (рис. 1, г).

Из рис. 1, г следует, что

$$\varphi_1 = \frac{h}{\cos(\gamma - \alpha - \beta)}. \quad (7)$$

Подставив (7) в (6), получим

$$\varphi = \frac{h \cos \beta}{\cos(\gamma - \alpha - \beta)} + c \cos \alpha + \sqrt{a^2 - \left[c \sin \alpha - \frac{h \cos \beta}{\cos(\gamma - \alpha - \beta)} \right]^2} \quad (8)$$

или в прямоугольной системе координат*

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2) [x \cos(\beta - \gamma) - y \sin(\beta - \gamma) - h \cos \beta] - 2c [x \cos(\beta - \gamma) - \\ - y \sin(\beta - \gamma)] \{ [x \cos(\beta - \gamma) - y \sin(\beta - \gamma) - h \cos \beta] = \\ = (a^2 - c^2) [x \cos(\beta - \gamma) - y \sin(\beta - \gamma)]^2 + \\ + 2hcy [x \cos(\beta - \gamma) - y \sin(\beta - \gamma)] - h^2(x^2 + y^2) \cos^2 \beta. \end{aligned} \quad (9)$$

Выражения (8) и (9), независимо от соотношения постоянных параметров a и c , являются уравнением кривой четвертого порядка.

2. $\varphi_1(r_1, \alpha) = 0$ — окружность радиуса R .

а) Центр окружности совпадает с центром пучка S_1 (рис. 1, д). Подставив в (6) $\varphi_1 = R$, получим уравнение кривой, по которой перемещается точка B .

$$\rho = R \cos \beta - c \cos \alpha + \sqrt{a^2 - (c \sin \alpha - R \sin \beta)^2}. \quad (10)$$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2) [x^2 + y^2 + R^2 - c^2 - a^2 - 2cx]^2 = \\ = 4R^2 [c(y \sin \beta - x \cos \beta) + (x^2 + y^2) \cos \beta]^2. \end{aligned} \quad (11)$$

* Здесь и далее уравнения воспроизводимых кривых даны как в полярной, так и в прямоугольной системах координат.

Выражение (10) или (11), независимо от соотношения a и c , является уравнением кривой шестого порядка.

б) Окружность (траектория точки A) проходит через точку S_0 , и ее центр находится на прямой $l-l$, проходящей через центр пучка S_1 под углом γ к SS_1 (рис. 1, в).

Из $\triangle S_1OA$ имеем

$$\rho_1 = 2R \cos(\gamma - \beta - \alpha). \quad (12)$$

Подставив (12) и (6), получим:

$$\begin{aligned} y &= 2R \cos(\gamma - \beta - \alpha) \cos \beta + c \cos \alpha + \\ &+ \sqrt{a^2 - [c \sin \alpha - 2R \cos(\gamma - \beta - \alpha) \sin \beta]^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 (x^2 + y^2 - 2cx - a^2 - c^2) - 4R^2 [x \cos(\gamma - \beta) + y \sin(\gamma - \beta)]^2 - \\ - 4Rc [x \cos(\gamma - \beta) + y \sin(\gamma - \beta)] (x \cos \beta + y \sin \beta) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражение (13) или (14), независимо от соотношения a и c , является уравнением кривой четвертого порядка.

в) Если же центр окружности радиуса R не находится в точке S и эта окружность не проходит через центр пучка S_1 (рис. 2, а), то

$$\rho_1 = k \cos(\gamma - \beta - \alpha) + \sqrt{R^2 - k^2 \sin^2(\gamma - \beta - \alpha)}, \quad (15)$$

и уравнение (6) примет вид:

$$\begin{aligned} k \cos \beta \cdot \cos(\gamma - \beta - \alpha) + \cos \beta \cdot \sqrt{R^2 - k^2 \sin^2(\gamma - \beta - \alpha)} + c \cos \alpha + \\ + \sqrt{a^2 - [c \sin \alpha - k \sin \beta \cdot \cos(\gamma - \beta - \alpha) + \sqrt{R^2 - k^2 \sin^2(\gamma - \beta - \alpha)} \sin \beta]^2} = \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (x^2 + y^2 + R^2 + c^2 - a^2 - cx)(x^2 + y^2) + k^2 [x^2 + y^2 + 2xy \sin 2(\gamma - \beta)] + \\ + k [x \cos(\gamma - \beta) + y \sin(\gamma - \beta)] [2c(x \cos \beta + y \sin \beta) - (x^2 + y^2) \cos^2 \beta] = \\ = [x^2 + y^2 - k [x \sin(\gamma - \beta) - y \cos(\gamma - \beta)] [x \cos(\gamma - \beta) + y \sin(\gamma - \beta)] + \\ + 2c(x \cos \beta + y \sin \beta) - (x^2 + y^2) \cos^2 \beta]^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Выражение (16) или (17) является уравнением кривой восьмого порядка.

Для синтеза механизмов, воспроизводящих кривые (8), (10), (13) и (16), воспользуемая схемой, изображенной на рис. 1, в.

На рис. 2, б показан механизм для образования кривой четвертого порядка (8), который представляет собой кулисный восьмизвенный механизм, состоящий из подвижных звеньев 1; 2; 3; 4; 5; 6 и 7 и стойки. Звено 7 движется прямолинейно по направляющим $l-l$. Перпендикуляр h , опущенный из центра пучка S_1 на $l-l$, составляет с направлением SS_1 угол γ . Точка B ползуна 3 воспроизводит кривую (8), т. е. изображенный на рис. 2, б механизм является материализацией геометрической схемы, изображенной на рис. 1, з.

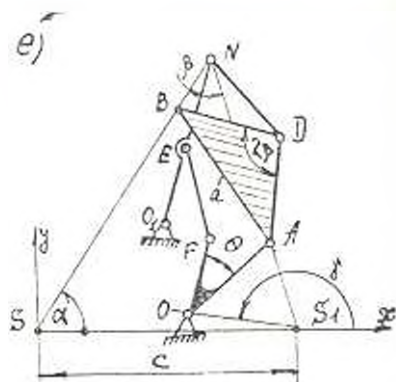
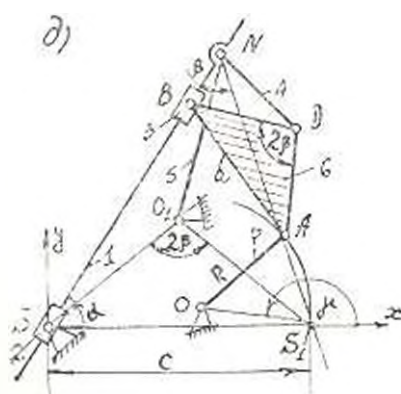
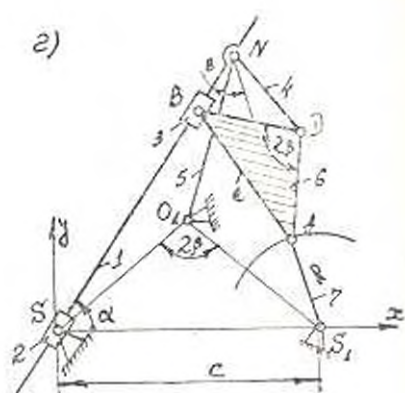
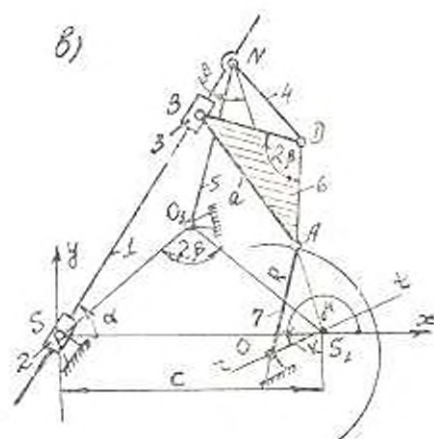
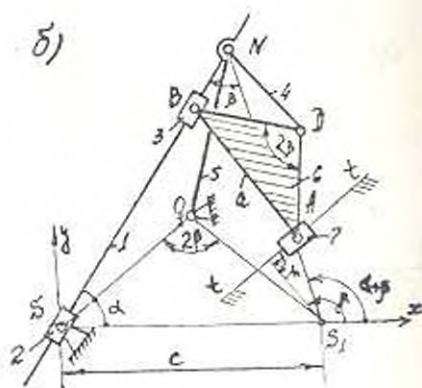
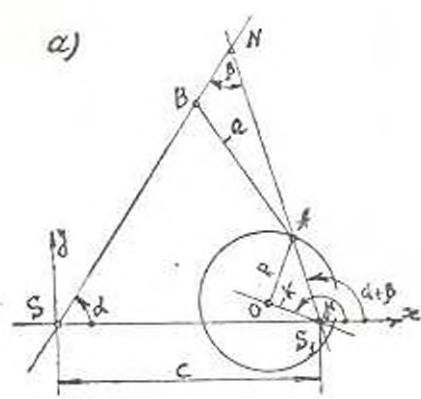


Рис. 2.

На рис. 2,в изображен механизм для образования кривой восьмого порядка (16). Механизм является кулисным и состоит из неподвижных звеньев 1; 2; 3, 4, 5, 6, 7 и стойки. Звено 7 вращается вокруг точки O , принадлежащей прямой $l-l$, проходящей через центр пучка S_1 под углом γ к SS_1 . Точка B ползуна 3 воспроизводит кривую (16).

Для образования кривой шестого порядка (10) механизм должен быть перестроен так, как это показано на рис. 2,г: неподвижный шарнир O совмещен с центром пучка S_1 . При вращении звена 7 вокруг точки $S_1(O)$ точка B ползуна 3 воспроизводит кривую (10).

Для образования кривой четвертого порядка (13) механизм перестраивается так, как это показано на рис. 2,д. Центр O расположен на прямой $l-l$ на расстоянии $k=R$ от центра пучка S_1 . Если звено 7 вращать вокруг точки O , то точка B ползуна 3 будет перемещаться по кривой (13).

На рисунках 2,а, г и д приняты следующие обозначения:

$$SS_1 = c; \quad AB = a; \quad S_1A = R; \quad OS_1 = k; \quad \angle SAS_1 = \beta; \quad \angle ASS_1 = \gamma.$$

Размеры остальных звеньев — производные величины и подсчитываются по формулам:

$$SO_1 = S_1O_1 = NO_1 = \frac{c}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}; \quad BO = AO = NO = \frac{a}{2 \sin \frac{\gamma}{2}};$$

$$OO_1 = \sqrt{\left(\frac{c}{2 \sin \frac{\gamma}{2}}\right)^2 - k^2} - \frac{kc}{\sin^2 \frac{\gamma}{2}} \sin \left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right).$$

Кулисно-рычажный восьмизвенный механизм, изображенный на рис. 2,д, возможно заменить шестизвенным механизмом только парами вращения [2]. Можно показать, что передаточное отношение между звеньями 5 и 1, 7 и 1 равно двум (рис. 2,е). Звено 1 имеет треугольный контур с жестким углом β (см. рис. 1,б), опирающийся на данный отрезок SS_1 , а звено 5 является радиусом окружности, по которой движется вершина A угла β . Следовательно, передаточное отношение между звеньями 5 и 1 равно двум ($i_{5,1} = 2$). Конечная точка A звена 7 в своем движении по окружности всегда находится на стороне AS_1 угла β и проходит через S , следовательно, передаточное отношение между звеньями 7 и 1 также равно двум ($i_{7,1} = 2$). Поэтому передаточное отношение между звеньями 5 и 7 равно единице ($i_{5,7} = 1$). Следовательно, в плоскости звена 5 или 7 всегда можно взять прямую, параллельную другому звену, и посредством схемы параллелограмма обеспечить синхронность движения этих звеньев. Тогда, не нарушая первоначального движения остальных звеньев, можно удалить ползуна 2; 3 и звено 1 и получить шестизвенный механизм только с вращательными кинематическими парами (рис. 2,е). Угол между звеньями O_1A и O_1A_1 $\angle FOA = Q = 90^\circ - \gamma + \beta$. Шатун BD полученного механизма совершает то же движение, что и в исходном механизме (рис. 2,д).



Полученный нами шестизвенный шарнирный механизм может быть преобразован в шарнирный четырехзвеник на основе теоремы, изложенной в монографии [3].

Механизмы, синтезируемые предложенным методом, могут быть применены при решении инженерных задач, связанных с обработкой изделия заданного профиля или с перемещением точек исполнительных органов машины по заданным траекториям и т. п.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим пример синтеза механизма для огибания эллипса. Известно, что подошвенная кривая эллипса является подерой эллипса с полюсом в его центре. Если в уравнении (13) принять

$$\gamma = 180^\circ - \beta; \quad 2R = c/\cos \beta, \quad (18)$$

то получим

$$\varphi = 1 - \frac{a^2 - c^2 (\sin \alpha - \cos \alpha \lg \beta)^2}{a^2}. \quad (19)$$

Выражение (19) является уравнением подошвенной кривой эллипса при

$$a > c \cos \beta.$$

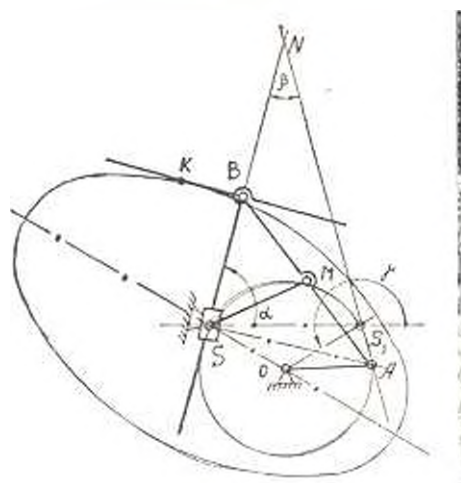


Рис. 3.

При выполнении условий (18) и $a > c/\cos \beta$ шатунная точка B механизма, изображенного на рис. 2,с, воспроизводит подошвенную кривую эллипса. Поэтому перпендикуляр, восстановленный к радиусу-вектору SB подошвенной кривой в точке B, будет всегда касателен к эллипсу с центром в точке S, имеющему большую ось $2a$ и межфокусное расстояние $2c/\cos \beta$.

На рис. 3 (где $OA = OS = \frac{c}{2 \cos \beta}$; $MS = MA = MB = \frac{a}{2}$;

$\angle BSA = 90^\circ$) изображен механизм для воспроизведения эллипса методом огибания, который построен на основе механизма, изображен-

ного на рис. 2,а, после преобразования его в шарнирный четырехзвенник. Полученный механизм компактен по сравнению с одноименными существующими механизмами и имеет возможно минимальную теоретическую длину режущего инструмента режущего типа

$$L = 2(BK)_{\min} = 2 \left[a - \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{\cos \beta} \right)^2} \right]$$

ЕрГУ

Получено 17.III.1977

Կ. Կ. ՇԱԽԲԱՅԱՆ, Գ. Ա. ԶԱԳԱՅԱՆՅԱՆ, Գ. Ս. ԿՈՒՐՅԱՆ

ՄԵԽԱՆԻԶՄՆԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶՈՒՄԸ ՓԵՋՆԵՐԻ ՄԻՋԵՎ ՈՐՈՇԱԿԻ
ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԽԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԻՄԱՆ ՎԲԱ, ԵՐԲ ՓԵՋՆԵՐԻ
ՀԱՄԱՊԱՏԱՍԽԱՆ ՈՒՂԻՆԵՐԸ ԿԱԶՄՈՒՄ ԵՆ
ՀԱՍՏԱՏՈՒՆ ԱՆԿՈՒՆ

Ա ռ զ յ ո զ յ ո լ լ յ

Հոդվածում առաջարկվում է մեթոդ, որի միջոցով հնարավոր է նախագծել բարձր կարգի հարթ կոնքեր վերարտադրող մեխանիզմներ: Ընդ որում մի մեխանիզմից մյուսին անցներ կատարվում է պարզ վերադարձան միջոցով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шахбазян К. Х., Давидович Д. А. К синтезу механизмов на основе определенных соответствий между звеньями прямых. «Изв. АН АрмССР. Механика», том XXVI, № 6, 1973.
2. Шахбазян К. Х., Давидович Д. А. Об одном методе замены поступательных пар вращательными в некоторых кулисно-рычажных механизмах. «Изв. АН АрмССР. Серия технических наук», том XXVI, № 3, 1973.
3. Блох З. Ш. Приближенный синтез механизмов. Машгиз, М., 1948.