

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Р. П. ДЖАВАХЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ФРЕЙДЕНШТЕЙНА НА ПЛОСКИЕ МНОГОЗВЕННЫЕ МЕХАНИЗМЫ II КЛАССА

В работе [2] Ф. Фрейдентштейном получены формулы:

$$z_2^0 = \omega_2 (\omega_1 - \omega_2) \operatorname{ctg} \psi_2 \quad (1)$$

$$a_2^0 = -z_1^0 \operatorname{ctg} \psi_2 \quad (2)$$

связывающие угол  $\psi_2$  между продольной осью  $AB$  шатуна (рис. 1) и осью коллинеации  $QP = P_1P_2$  со скоростью и ускорением ведомого звена 2 четырехшарнирного ( $\omega_1, z_1^0$ ) и центрально-кривошипно-ползунного ( $\omega_2, a_2^0$ ) механизмов при равномерном вращении их ведущих кривошипов с угловой скоростью  $\omega_1$ . Угол  $\psi_2$  откладывается от оси шатуна  $QB$  против вращения кривошипа.

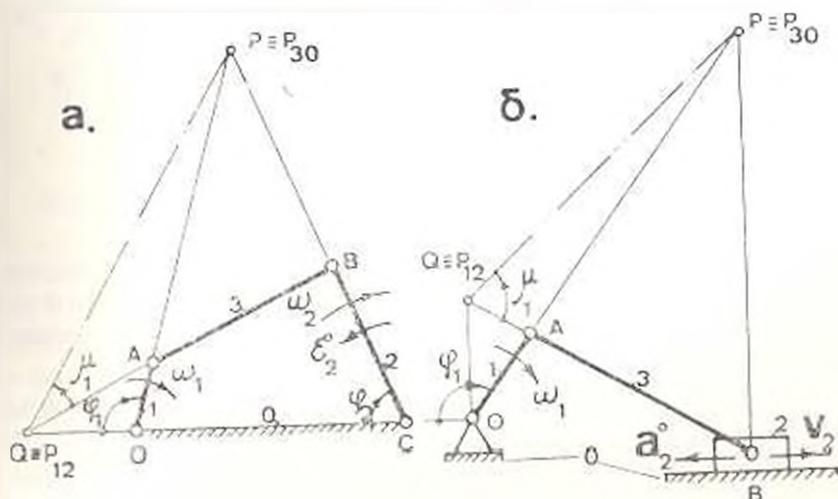


Рис. 1.

В работе [1] дается более простой вывод этих формул, распространяя их на случай дезаксимального кривошипно-ползунного и кулисного механизмов, и показывается, что для кулисного механизма применима формула (1) четырехшарнирного механизма.

Формулами Фрейдентштейна удобно пользоваться при исследовании положений четырехзвенного механизма, в которых скорость ведомого звена равна нулю.

мого звена экстремальна ( $\varepsilon_2^0 - \alpha_2^0 = 0$  и  $\alpha_1 = 90^\circ$ ), и при их синтезе по заданному экстремальному значению скорости ведомого звена; особенно если учесть, что аналитическое определение положений механизма, соответствующих экстремальным значениям скорости ведомого звена, а также значений последних для четырехзвенных механизмов приводит к решению уравнений шестой степени [4, 5].

В работе Хайна [3] предложен графоаналитический метод определения углового ускорения ведомого звена шестизвенного рычажного механизма.

В данной работе формула Фрейденштейна расширяется на плоские многозвенные механизмы, полученные путем последовательного присоединения к ведущему звену и стойке структурных групп II класса.

Рассмотрим сначала случай, когда ведущее звено  $O_1$  четырехшарнирного механизма вращается с равномерной скоростью  $\omega_1$  с заданным угловым ускорением  $\varepsilon_1$ , в указанном на рис. 1, а положении, а ведомое звено  $BC$  имеет угловое ускорение  $\varepsilon_2$ . Найдем связь между ускорениями  $\varepsilon_1$ , соответствующим равномерному вращению кривошипа  $O_1A$  с угловой скоростью  $\omega_1$  рассматриваемого положения, и  $\varepsilon_2$ . Имеем

$$\varepsilon_2^0 = \omega_1^2 \frac{d^2 \gamma_2}{d\tau_1^2} - \omega_1^2 \frac{d}{d\tau_2} \left( \frac{d\gamma_2}{d\tau_2} \right),$$

или, имея в виду, что  $d\tau_2 = \omega_2 dt$  и  $d\tau_1/d\tau_2 = \omega_2/\omega_1$ , получим

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\tau_2} (\varepsilon_1 \omega_1 - \omega_2^2 \tau_2). \quad (3)$$

Подставляя полученное значение в формулу (1), находим

$$\frac{\varepsilon_2}{\omega_2} = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1} + (\omega_2 - \omega_1) \operatorname{ctg} \gamma_2. \quad (4)$$

Формула (4) связывает угловые ускорения и скорости ведущего и ведомого звеньев с углом  $\gamma_2$  и выражает теорему Фрейденштейна для четырехшарнирного и кулисного механизмов в случае установившегося вращения их ведущих звеньев.

Если мы имеем плоский многозвенный механизм, содержащий последовательно соединенные четырехзвенные контуры (рис. 2), то, составляя аналогичные выражения для каждого четырехзвенного контура, будем иметь:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\varepsilon_2}{\omega_2} &= \frac{\varepsilon_1}{\omega_1} + (\omega_2 - \omega_1) \operatorname{ctg} \gamma_{21} \\ \frac{\varepsilon_3}{\omega_3} - \frac{\varepsilon_2}{\omega_2} &= (\omega_3 - \omega_2) \operatorname{ctg} \gamma_{32} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{\varepsilon_{n+1}}{\omega_{n+1}} - \frac{\varepsilon_n}{\omega_n} &= (\omega_{n+1} - \omega_n) \operatorname{ctg} \gamma_{n+1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Сложив почленно левые и правые части выражений (4) и (5), исключая члены, содержащие ускорения промежуточных звеньев, получим

$$\frac{a_{n+1}}{r_{n+1}} - \frac{a_1}{r_1} = \sum_{i=1}^n (\omega_{i+1} - \omega_i) \operatorname{ctg} \gamma_i. \quad (6)$$

В формулах (3)–(6) все угловые скорости и ускорения, круговые стрелки которых совпадают с направлением вращения ведущего звена, положительны, в противном случае отрицательны.

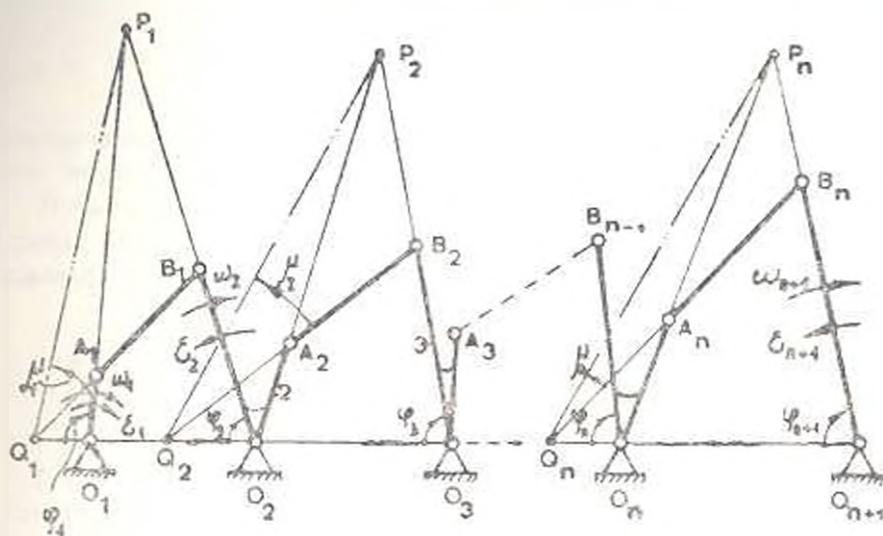


Рис. 2

Формула (6) связывает угловые скорости и ускорения ведомого ( $\omega_{n+1}$ ,  $a_{n+1}$ ) и ведущего ( $\omega_1$ ,  $a_1$ ) звеньев многозвенного механизма, состоящего из последовательно соединенных  $n$  четырехзвенных контуров, с угловыми скоростями  $\omega_i$  промежуточных звеньев и значениями углов  $\gamma_i$  отдельных контуров. Она выражает теорему Фрейденштейна в общем случае последовательно соединенного многозвенного механизма (рис. 2) с неравномерно вращающимся ведущим звеном. Следует отметить, что формула (6) справедлива также для плоских многозвенных механизмов, в которых шарниры  $B_i$  (все или частично) заменены кулисными парами.

Рассмотрим теперь кривошипно-ползунный механизм. Если это ведущее звено  $O_1A_1$  вращается неравномерно с угловым ускорением  $a_1$  в указанном на рис. 1, б положении, то ускорение ведомого ползуна будет  $a_2$  вместо  $a_2^0$ . Найдём связь между параметрами  $\epsilon_1, a_2$  и  $a_2^0$ . Имеем

$$\omega_2^0 = \omega_1^0 \frac{d^2 s_1}{d\varphi_1^2} = \omega_1^0 \frac{d}{d\varphi_1} \left( \frac{ds_1}{d\varphi_1} \right),$$

или, имея в виду, что  $dz_1 = v_1 dt$  и  $d^2 z_1 = v_1 \omega_1$ , аналогично (3) получим

$$a_1 = \frac{a_2 v_1 - z_1 v_2}{v_1}.$$

Подставляя это значение в выражение (2), получим

$$\frac{a_2}{v_2} = \frac{z_1}{v_2} - v_1 \operatorname{ctg} \alpha_1, \quad (7)$$

или, имея в виду, что для ползуна  $\omega_2 = 0$ , для общности запишем формулу (4) и (7) запишем:

$$\frac{a_2}{v_2} = \frac{z_1}{v_1} + (v_2 - v_1) \operatorname{ctg} \alpha_1. \quad (8)$$

Для кривошипно-ползунного механизма с неравномерно вращающимся кривошипом  $OA$  формулу (8) формально можно было получить из (4), заменив в ней  $v_2/\omega_2$  отношением  $a_2/v_2$  и приняв  $\omega_2 = 0$ .

Если ведомое звено плоского многозвенного механизма (рис. 2) совершает поступательное движение, то заменив последнее равенство системы (5) выражением

$$\frac{a_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{z_n}{v_n} + (v_{n+1} - v_n) \operatorname{ctg} \alpha_n,$$

записанным аналогично (8), и сложив, получим:

$$\frac{a_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{z_1}{v_1} + \sum_{i=1}^n (v_{i+1} - v_i) \operatorname{ctg} \alpha_i.$$

Пользуясь формулой (8), легко показать, что если поступательное движение совершает какое-нибудь промежуточное звено (скажем второе) плоского механизма, то, заменив (4) выражением (8) и первое выражение системы (5) равенством

$$\frac{z_2}{v_2} = \frac{a_2}{v_2} + (v_2 - v_1) \operatorname{ctg} \alpha_1,$$

полученным аналогично (8), получим ту же формулу (6).

Таким образом, в общем случае, когда плоский многозвенный механизм получается путем последовательного соединения четырехшарнирных, кривошипно-ползунных и кулисных механизмов, будем иметь

$$\gamma_{n+1} = \gamma_1 + \sum_{i=1}^n (v_{i+1} - v_i) \operatorname{ctg} \alpha_i, \quad (9)$$

где  $\gamma$  представляет отношение ускорения звена к его скорости (линейных или угловых в зависимости от характера движения звена), т. е.

$$\gamma_1 = \frac{z_1}{v_1}; \quad \gamma_{n+1} = \frac{z_{n+1}}{v_{n+1}} \quad \text{или} \quad \gamma_{n-1} = \frac{a_{n-1}}{v_{n-1}}.$$

В формулу (9) входят ускорения только ведущего и ведомого звеньев механизма. Если механизм содержит промежуточный или конечный ползун, то для них в формуле (9) подставляется  $\omega_k = 0$ .

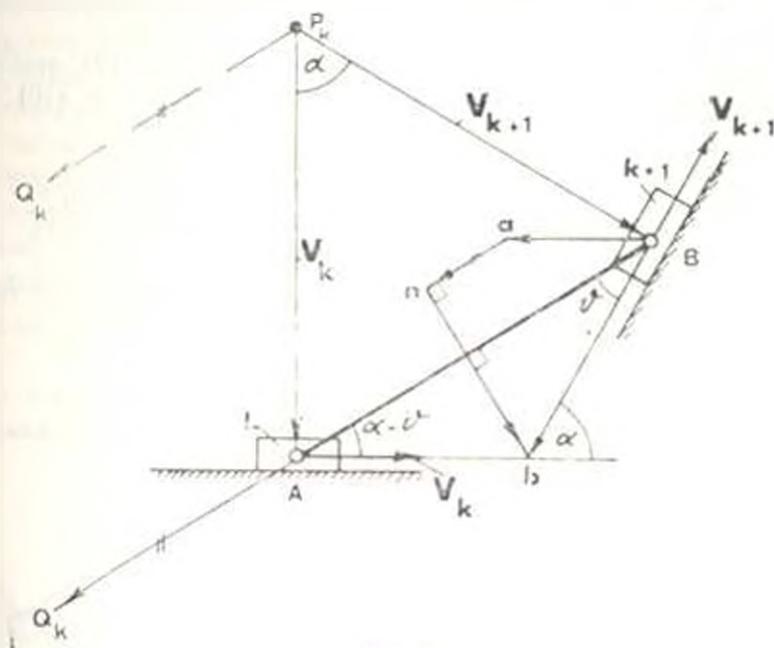


Рис. 3.

Формула (9) выражает обобщенную теорему Фрейдентштейна для многозвенных механизмов, полученных путем последовательного присоединения к ведущему звену и стойке структурных групп II класса, I, II и III видов, причем каждая последующая группа присоединяется к стойке и к звену предыдущей группы, входящему в кинематическую пару со стойкой. Следует отметить, что группы могут быть присоединены в любой последовательности. Исключение составляет случай, когда многозвенный механизм содержит две группы второго вида, присоединенные подряд, т. е. при наличии двух ползунков (выделенных на рис. 3 и обозначенных индексами  $k$  и  $k+1$ ), шарнирно соединенных к одному и тому же шатуну. В этом случае член в формуле (9), соответствующий значению  $i = k$ , вырождается в неопределенность типа  $0 \cdot \infty$ , так как  $\omega_k = \omega_{k+1} = 0$  и  $\omega_k = 0$ . Для нахождения связи между ускорениями  $a_{k+1}$  и  $a_k$  построим планы скоростей ( $P, AB$ ) и ускорений ( $Banb$ ) выделенной на рис. 3 части многозвенного механизма, из рассмотрения которых имеем:

$$\frac{v_{Bk}}{AB} = \frac{v_{Pk}}{AP_k} = \frac{v_{Bk+1}}{AB} : |a_{k+1}| \cos \theta = |a_k| \cos (\alpha - u) = \frac{v_{Bk}^2}{l}$$

Из полученных выражений с учетом знаков ускорений находим

$$\frac{v_{k+1}}{v_{k-1}} = \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \frac{v_h^2}{v_{k-1}} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{l \cos^3 \theta} \quad (10)$$

где  $l$  — длина катушки;  $\alpha$  — угол между направляющими ползунов;  $\theta$  — угол давления.

В рассматриваемом случае при выводе формулы (6) необходимо заменить соответствующее выражение в (5) выражением (10), и тогда получим

$$\frac{v_{k+1}}{v_{k-1}} = \frac{v_1}{v_2} = \sum_{i=1}^{k-1, k-1, \dots, \pi} (\omega_{i+1} - \omega_i) \operatorname{ctg} \mu_i + \frac{v_h^2}{v_{k-1}} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{l \cos^3 \theta} \quad (11)$$

т. е. в этом случае при раскрытии суммы пропускается член, соответствующий значению  $i = k$ , вместо которого добавляется последний член в выражении (11).

Пользуясь обобщенной формулой (9), можно найти условие  $v_{k+1} = 0$  экстремума скорости ведомого звена многозвенного механизма, которое принимает вид

$$\frac{v_1}{v_2} - \sum_{i=1}^n (\omega_{i+1} - \omega_i) \operatorname{ctg} \mu_i = 0 \quad (12)$$

для механизмов с неравномерно вращающимся ведущим звеном, и

$$\sum_{i=1}^n (\omega_{i+1} - \omega_i) \operatorname{ctg} \mu_i = 0, \quad (13)$$

для механизмов с равномерно вращающимся ведущим кривошипом.

Выражения (9), (11) и (13) можно использовать как для анализа движения ведомого звена с учетом неравномерности вращения ведущего звена механизма, так и при синтезе многозвенных механизмов по заданным значениям скорости и ускорения ведомого звена в заданном положении механизма.

Рассмотрим следующие задачи синтеза плоских многозвенных механизмов.

1°. Требуется проэктировать восьмизвенный механизм (рис. 4) по заданным положениям ( $\varphi_1, \varphi_4$ ), скоростям ( $\omega_1, \omega_4$ ) и ускорениям ( $\varepsilon_1, \varepsilon_4$ ) ведущего и ведомого звеньев.

Для общности задача решается с учетом углового ускорения ведущего звена. Из формулы (6) следует, что заданные значения  $\omega_4$  и  $\varepsilon_4$  можно получить путем соответствующего выбора схемы только одного четырехзвенного контура многозвенного механизма. В самом деле, при известных контурах\*  $O_1A_1B_1O_2$  и  $O_2A_2B_2O_4$  из формулы (6) можно найти значение угла  $\mu_2$  для контура  $O_2A_2B_2O_4$ , размеры которого

\* Контурсы могут быть соответственно получены по коэффициенту изменения средней скорости ведомого звена  $B_2O_4$  и по условию обеспечения наилучших углов передачи в шарнире  $B_2$ .

подлежат определению, и по нему — искомые размеры. Положение точки  $Q_2$  можно найти по известным значениям угловых скоростей  $\omega_2$  и  $\omega_1$  промежуточных звеньев. Выбрав полюс  $P_2$  по известному значению угла  $\mu_2$ , можно найти искомые размеры контура  $O_2A_2B_2O_3$  и положения шарниров  $A_2$  и  $B_2$  на промежуточных звеньях (построения показаны стрелками). Выбор положения полюса  $P_2$  можно подчинить условию получения хода ведомого звена или его задаче или улучшению условий передачи сил в шарнире  $B_2$ , или, наконец, обеспечению значения угла  $\varphi_2^*$ , если положение  $B_2O_3$  ведомого звена задано не относительно линии стойки ( $\varphi_2$ ), а относительно одного из его крайних положений ( $\varphi_2^*$ ).

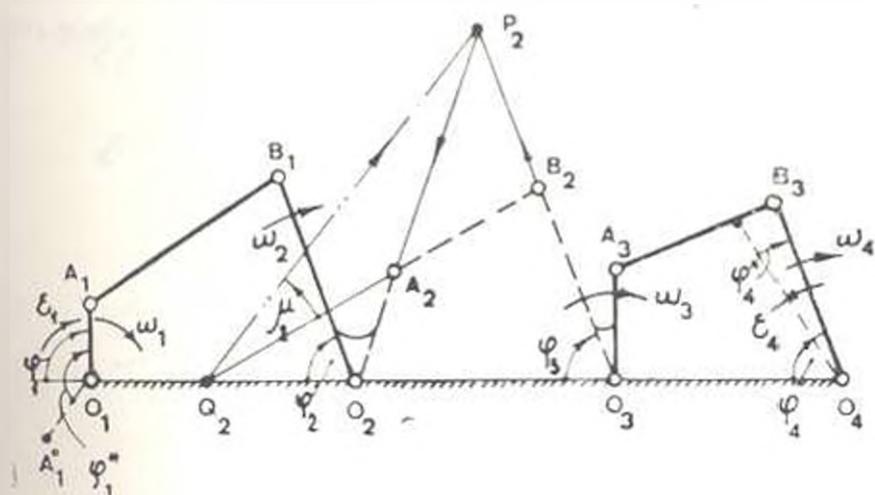


Рис. 4.

Таким образом, вышеуказанная задача синтеза многозвенного механизма сводится к синтезу только одного его контура с известными значениями скоростей и ускорений (или угла  $\mu_1$  его звеньев, входящих в кинематические пары со стойкой).

2°. Рассмотрим задачу синтеза шестизвенного механизма по максимальному значению угловой скорости вращения ведомого звена ( $\omega_2^{max}$ ) при его прямом ходе. Условие (13) экстремума для шестизвенного механизма ( $n = 2$ ) с равномерно вращающимися кривошипном ( $\omega_1 = \text{const}$ ) принимает вид

$$(\omega_2 - \omega_1) \text{ctg} \varphi_1 - (\omega_2^{max} - \omega_1) \text{ctg} \varphi_2 = 0, \quad (14)$$

или через аналоги угловых скоростей —

$$(z_2 - 1) \text{ctg} \varphi_1 - (z_2^{max} - z_2) \text{ctg} \varphi_2 = 0.$$

Имеем

$$z_2 = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{d z_2}{d \varphi_1} \frac{d \varphi_1}{d z_2} = z_2 \frac{d \varphi_1}{d \varphi_2} = \frac{O_1 Q_1}{O_2 Q_1} \frac{O_1 Q_2}{O_2 Q_2}, \quad (15)$$

где  $d\varphi_3/d\varphi_2$  — аналог угловой скорости звена 3 второго четырехзвенника. Рассмотрим сначала механизмы, в которых звено 2 является кривошипом. В этом случае аналоги  $d\varphi_2/d\varphi_1$  и  $d\varphi_3/d\varphi_2$  имеют по два экстремума за один оборот кривошипов. Из выражения (14) следует, что если первый четырехзвенник взят в экстремальном положении [т. е. при  $\varphi_2^0 = 0$  и  $\mu_2 = 90^\circ$ , что следует из (1)], то и второй четырехзвенник нужно брать в своем экстремальном положении ( $\mu_2 = 90^\circ$ ). В этом случае и шестизвенник и составляющие четырехзвенники находятся в положении экстремальных скоростей своих ведомых звеньев (рис. 5). Выбор точек  $Q_1$  или  $Q_2$  нужно подчинить условию (15) для  $\omega_3^0$ . Графики функций  $\tau_2(\varphi_2) = \frac{d\varphi_3}{d\varphi_2}(\varphi_2)$  для составляющих четырехзвенников и  $\tau_3(\varphi_2)$  для шестизвенника, построенные по формуле (15), приведены на рис. 5, б.

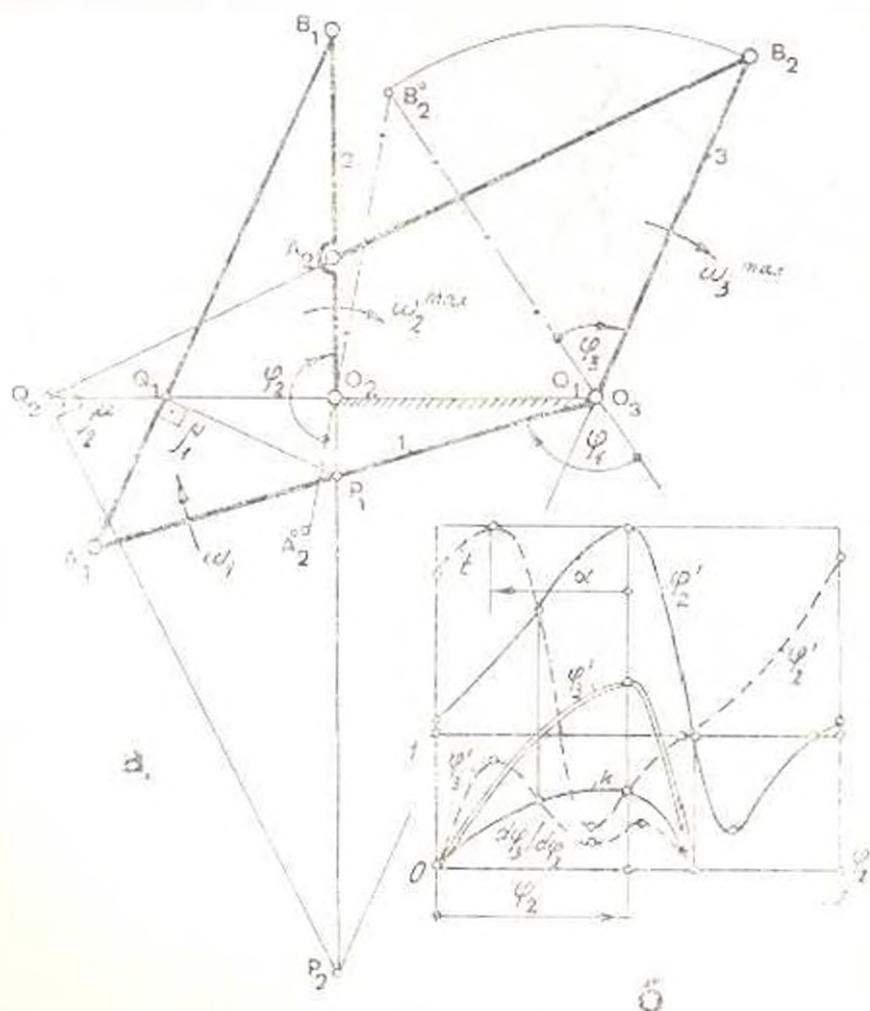


рис. 5.

Если же положения экстремальных  $\varphi_2$  и  $d\varphi_2/d\varphi_3$  смещены друг относительно друга на угол  $\alpha$  (кривые  $k$  и  $l$  на рис. 3, б), то в зависимости от знака и величины угла  $\alpha$  аналог  $\varphi_3$  может иметь один или несколько экстремумов за прямой ход ведомого звена, но наибольшее значение  $\varphi_3$  всегда будет меньше, чем в предыдущем случае.

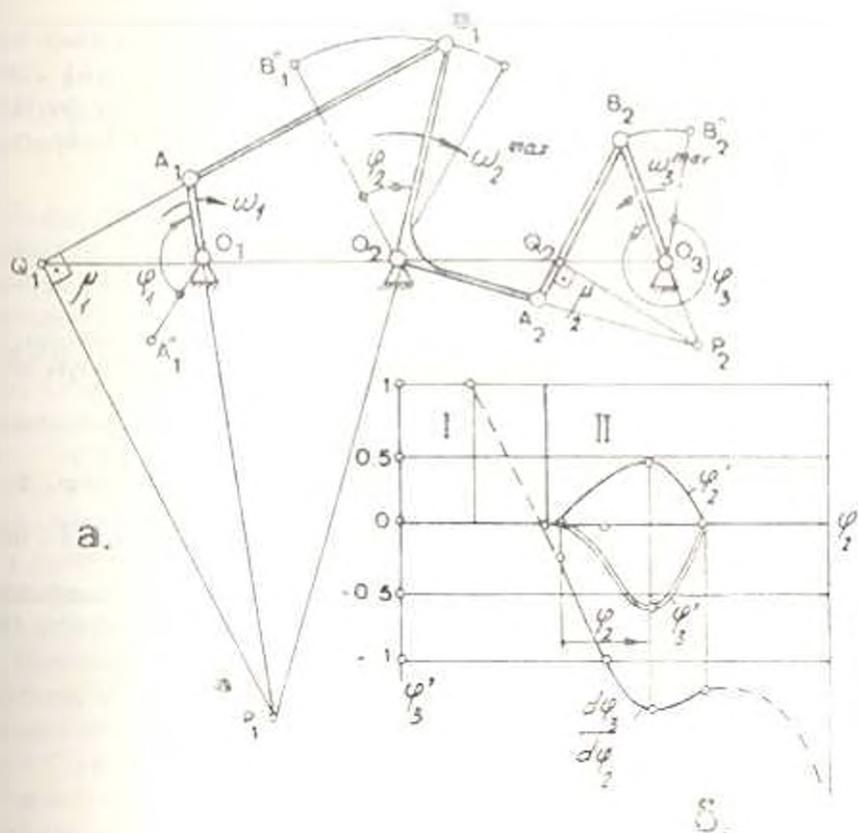


Рис. 6.

Указанные рассуждения справедливы также для случаев, когда ведомое звено совершает поступательное движение или же, когда шарниры  $B_1$  и  $B_2$  (вместе или в отдельности) заменены кулисными парами.

Если промежуточное звено 2 совершает полярное движение, то указанная методика справедлива только в случае, когда при рабочем ходе  $\frac{d\varphi_2}{d\varphi_3} < 0$ , т. е. звенья 2 и 3 вращаются в разные стороны (рис. 6, а), и двухкоромысловый механизм  $O_2A_1B_2O_3$  идет на участке II (рис. 6, б).

Բ. Պ. ԶԱՎԱՆՅԱՆ

ՄԻՔՐՈՆԱԿՆԵՑՅԱԿ ԻՆՈՐԵՆՏ ՏԱՐԱՆՈՒՄԸ ԵՐԿՐՈՐԴ ԳՍԱԿ  
ՀԱՐԲ ԲԱԶՄՈՂԱԿ ԻՆՆԱՆՆՈՂԻՆԵՐԻ ՎՐԱ

## Ա Մ Փ Ո Փ Ն Ո Ւ Մ

Հստակապես ֆրեյդենշտեյնի թեորեմը տարածված է երկրորդ դասի հարթ բազմաթղթի լծակաչին մեխանիզմների վրա։ Արտածված է բաժնագրակ մեխանիզմի տանող և առաջող սղակների արագությունների ու արագացումների իրար հապող ընդհանուր բանաձև, որը հարելի է սղակադրձեկ մեխանիզմների կինեմատիկական վերլուծության և նախադրման ժամանակ։

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Борисенко Л. И.* О теореме Фрейденштейна и о некоторых графоаналитических методах анализа и синтеза четырехзвенных механизмов. Труды Института машиноведения, семинар по ТММ, 1962, т. 23, вып. 89—90.
2. *Freudenstein F.* On the Maximum and Minimum Velocities and the Accelerations in Four-Link Mechanisms. Transaction ASME, 1955, v. 78, 4.
3. *Hain K.* Winkelbeschleunigungen in biner ein- und ergeschalteten Getrieben. „Werkstoff und Betrieb“, 1971, 101, 2.
4. *Sicker K. H.* Berechnung der Gelenkviereck-Lagen für die Extremwerte des Übersetzungsverhältnisses. „Feinwerktechnik“, 1966, 70, 2.
5. *Sicker K. H.* Berechnung der Getriebelagen von Schubkurbel- und Kurbelchleifen für die Extremwerte des Übersetzungsverhältnisses. „Feinwerktechnik“, 1966, 70, 7.