ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXIX, № 5, 1976 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

С. О. МКРТЧЯН, В. Н. ГАЗИЯН, Г. С. ГАСПАРЯН

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО N-НЕЙРОНА

Логические элементы нейронного типа представляют значительный интерес с точки зрения их использования в устройствах автоматики и вычислительной техники. Впервые модель такого элемента была предложена Мак-Каллоком [1].

В [2, 3] приводятся алгоритмы синтеза оптимального формального нейрона (ФН) Мак-Каллока по заданной пороговой диаграмме (ПД). В [4,5] предложены модели ФН, отличающиеся от ФН Мак-Каллока типом взаимодействия входных волокон. В этих же работах описаны алгебраические методы синтеза ФН по заданной ПД, позволяющие получить однозначное решение.

Наибольший практический интерес представляет задача синтеза оптимального ФН по заданной булевой функции F, которая, однако, не решена до настоящего времени.

В данной работе решается задача синтеза ФН с взаимодействием входных волокон типа «разрешение», который далее будем называть N-нейроном.

N-нейроном называется n-входовой формальный нейрон с (2^n-1) взаимодействиями типа „разрешение“, работа которого описывается выражением

$$f_i = \operatorname{sign}\left[\sum_{j=1}^{2^n-1} w_j a_{ji} - T\right], \tag{1}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2^n-1)$$

где f_i — значение функции F на i-ом двоичном наборе входных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; a_{ji} — значения j-го взаимодействия a_j на i-ом двоичном наборе входных переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; w_j — вес j-го взаимодействия; T — порог нейрона.

Функция $\operatorname{sign}\varphi$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{sign}\varphi = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } \varphi < 0. \end{cases}$$

Отметим, что f_i и $a_{ji} \in [0, 1]$, w_j и T принимают любые целочисленные значения. При этом j-ое взаимодействие включает в себя только те переменные, которым соответствуют „единичные“ компоненты двоичного вектора $j = (j_n, j_{n-1}, \ldots, j_1)$. Например, w_6 — вес взаимодействия $x_3\,x_2$, так как $j_3 = j_2 = 1$, а $j_1 = 0$ $(6_{10} = 110_2)$.

Пусть логическая функция задана набором значений $F = \{f_i\}$. Из определения функции $\operatorname{sign}\varphi$ следует, что

$$\sum_{j=1}^{2^n-1} w_j a_{ji} - T \begin{cases} \geqslant 0, & \text{если } f_i = 1, \\ < 0, & \text{если } f_i = 0. \end{cases} \tag{2}$$

$(i=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1)$

Введением дополнительных неизвестных $\alpha_i \geqslant 0$ система неравенств (2) сводится к системе равенств

$$\sum_{j=1}^{2^n-1} w_j a_{ji} - T = \begin{cases} \alpha_i & \text{для } f_i = 1, \\ -\alpha_i - 1 & \text{для } f_i = 0. \end{cases} \tag{3}$$

или

$$\sum_{j=1}^{2^n-1} w_j a_{ji} = T + (2f_i - 1)\alpha_i + f_i - 1. \tag{4}$$

$$(i=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1)$$

Введем критерий оптимума И-нейрона. Как известно, при технической реализации ФН или пороговых элементов [6, 7] основным ограничивающим фактором является сумма абсолютных величин весов $\sum_{j=1}^{2^n-1} |w_j|$. Для И-нейронов важную роль играет также значимость взаимодействия, т. е. количество входов в данном взаимодействии. Поэтому в качестве критерия оптимума И-нейрона принимаем функционал $\sum_{j=1}^{2^n-1} [j]\,|w_j|$, где $[j]$ — количество единиц в двоичном представлении числа j, $|w_j|$ — абсолютное значение веса j-го взаимодействия.

И-нейрон называется оптимальным, если его параметры обеспечивают минимум функционала

$$R = \sum_{j=1}^{2^n-1} [j]\,|w_j|. \tag{5}$$

Таким образом, задача синтеза оптимального И-нейрона представляет собой задачу минимизации функционала (5) при ограничивающих условиях (4).

Покажем, что данная задача сводится к эквивалентной задаче линейного программирования. Воспользуемся для этого методом, предложенным в [8]. Представим переменную w_j в виде разности двух неотрицательных чисел, т. е. $w_j = w_j' - w_j''$. При этом система (4) принимает вид:

$$\sum_{j=1}^{2^n-1} w_j' a_{ji} - \sum_{j=1}^{2^n-1} w_j'' a_{ji} + T + (2f_i - 1)\alpha_i = 1 - f_i. \tag{6}$$

$$i=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1.$$

Запишем систему равенств (6) в векторной форме:

$$\sum_{j=1}^{2^n-1} A_j w_j' - \sum_{j=1}^{2^n-1} A_j w_j'' + \sum_{j=0}^{2^n-1} A_{2^n+j}\alpha_j + A_{2^n+1} T = A_0. \tag{7}$$

Все векторы равенства (7) являются векторами-столбцами, причем вектор A_{2^n+1} представляет собой единичный вектор, а векторы A_j, A_{2^n+j} и A_0 определяются следующим образом:

$$A_j = |a_{ij}|; \quad A_{2^n+j} = |b_{ij}|; \quad A_0 = |1-f_i|,$$

где

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 2f_i - 1 & \text{при } i = j, \end{cases}$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1.$$

Согласно теореме, приведенной в [8], необходимым и достаточным условием того, чтобы совокупность неотрицательных чисел определяла координаты вершин многогранника условий, является линейная независимость системы векторов при ненулевых компонентах. В векторном уравнении (7) векторы A_j при неизвестных w'_j и w''_j одинаковые, значит, по крайней мере одна из неизвестных w'_j и w''_j равна нулю. Так как по условию $w'_j \geqslant 0$ и $w''_j \geqslant 0$, то очевидно равенство

$$|w'_j - w''_j| = w'_j + w''_j. \tag{8}$$

С учетом (8) функционал R записывается в линейной форме

$$R = \sum_{j=1}^{2^n-1} |j| \; (w'_j + w''_j). \tag{9}$$

Введем единое обозначение для переменных w'_j, w''_j, T и z_j:

$$w''_j = Z_{2j-1}; \quad w'_j = Z_{2j}; \quad T = Z_{2^{n+1}-1}; \quad z_0 = Z_{2^{n+1}};$$

$$z_j = Z_{2^{n+1}+j}; \quad j = 1, 2, \ldots, 2^n - 1.$$

Функционал R и система (6) при принятых обозначениях имеют вид:

$$R = \sum_{j=1}^{2^n-1} |j| \; (Z_{2j} + Z_{2j-1}); \tag{10}$$

$$\sum_{j=1}^{2^n-1} [a_{ij}(Z_{2j} - Z_{2j-1})] + \sum_{j=0}^{2^n-1} b_{ij} Z_{2^{n+1}-1} = 1 - f_i,$$

где $\qquad i = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1;$

$$b_{ij} = \begin{cases} 2f_i - 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \tag{11}$$

Таким образом, задача синтеза оптимального И-нейрона по заданной функции F сводится к задаче минимизации линейной формы (10) при ограничивающих условиях (11).

Общее число переменных M и ограничивающих условий N определяется по формулам:

$$M = 3 \cdot 2^n; \qquad N = 2^n.$$

Для решения задачи синтеза И-нейрона были использованы стандартные подпрограммы симплекс-метода линейного программирования, имеющиеся в ЭВМ „Наири—2“ и „Минск—22М“.

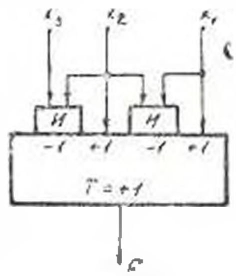

Рис. 1.

Пример. Синтезировать оптимальный И-нейрон, реализующий функцию $F = x_1 \overline{x_2} \vee x_2 \overline{x_3}$.

При решении этого примера на ЭВМ „Минск—22М“ были получены следующие значения ненулевых переменных: $Z_1 = Z_2 = Z_4 = Z_{12} = Z_{15} = +1$ (т. е. $w_1 = w_2 = T = +1$); $w_3 = w_6 = -1$. Нетрудно убедиться, что весовым коэффициентам w_1, w_2, w_3 и w_6 соответствуют взаимодействия x_1, x_2, $x_1 x_2$ и $x_2 x_3$. Оптимальный И-нейрон с полученной структурой показан на рис. 1. Значение функционала R для указанного И-нейрона равно 6.

ЕрНИИММ Поступило 20.IV.1976.

Ս. Հ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Վ. Ն. ԳԱՉԻՅԱՆ, Գ. Ս. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

«ԵՎ» ՏԻՊԻ ՕՊՏԻՄԱԼ ՆԵՅՐՈՆԻ ՍԻՆԹԵԶԸ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտվում են «ԵՎ» տիպի ֆորմալ նեյրոնի սինթեզման հարցերը։ Բերված է «ԵՎ» տիպի ֆորմալ նեյրոնի սահմանումը և սինթեզման խնդիրը ըստ տրված բուլյան ֆունկցիայի։ Ցույց է տրված, որ այդ խնդիրը բերվում է գծային ծրագրավորման։ Բերված է օպտիմալ «ԵՎ» նեյրոնի սինթեզման օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mac Culloch W. S.* Agathe Tyche of Nervous Nets— the Lucky Reckoners. Proc. Symp. of Mech. of Thought Proc., N. P. L., Teddington, 1958.
2. *Scott R. I.* Construction of a Neuron Model. IRE Trans. on BME, vol. BME—8, No 5, 1961.
3. *Гутчин И. Б., Кузичев А. С.* Бионика и надежность. М., «Наука», 1967.
4. *Мкртчян С. О.* О модели ФН с объединяющимися волокнами. «Изв. АН СССР. Техн. киб.», № 3, 1970.
5. *Мкртчян С. О.* Нейроны и нейронные сети. М., «Энергия», 1971.
6. *Вавилов Е. Н.* и др. Синтез схем на пороговых элементах. М., Изд. «Сов. радио», 1970.
7. *Мкртчян С. О.* Комплекс пороговых логических элементов для проектирования ЦВМ. ВРЭ, серия ЭВТ, вып. 4, 1972.
8. *Юдин Д. Б., Гольштейн Е. Г.* Задачи и методы линейного программирования. М., изд. «Сов. радио», 1971.