

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Л. М. ГАВТОВА

РАСЧЕТ НА ИЗГИБ УПРУГО-ПОЛЗУЧЕЙ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ
ПЛИТЫ НА УПРУГО-ПОЛЗУЧЕМ ОСНОВАНИИ

В настоящей работе, исходя из наследственной теории ползучести Маслова-Арутюнян [1] и из вариационных уравнений [2, 3], получено вариационное уравнение для изгиба железобетонной упруго-ползучей плиты на упруго-ползучем основании. Задача сводится к системе интегральных уравнений для симметрично-армированных железобетонных плит при учете ползучести бетона и основания. Вопросы, связанные с напряженно-деформированным состоянием упруго-ползучих бетонных конструкций на упруго-ползучем основании, рассмотрены в работах [4, 5] и др.

1° Пусть железобетонная симметрично-армированная плита находится в равновесии под действием внешних заданных сил. Принимаем, что внешние силы такие, что элемент плиты испытывает только изгибающие и крутящие моменты $M_{ij}(t)$.

Зависимости между компонентами деформаций и напряжений в бетоне имеют вид [1]:

$$\varepsilon_{ij}(t) = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij}(t) - \nu\sigma(t)\delta_{ij}] + \\ + \frac{1}{E} \int_0^t [(1 + \nu)\varepsilon_{ij}(\tau) - \nu\varepsilon(\tau)\delta_{ij}] K(t, \tau) d\tau, \quad (i, j = 1, 2) \quad (1)$$

где ν — коэффициент Пуассона; δ_{ij} — символ Кронекера; $\sigma(t)$ — сумма нормальных напряжений; E — модуль деформации бетона;

$$K(t, \tau) = -E\varphi'(\tau) + E[\varphi'(\tau) + \gamma\varphi(\tau)]e^{-W(t-\tau)}; \quad (2)$$

$\varphi(\tau) = A/\tau + C_0$; A , γ , C_0 — характеристики ползучести бетона; материал арматуры считаем идеально упругим с модулем упругости E_1 .

По гипотезе прямых нормалей, деформации бетона в момент t будут

$$\varepsilon_{ij}(t) = \kappa_{ij}(t)z, \quad (3)$$

где $\kappa_{ij}(t)$ — кривизна нейтрального слоя плиты.

Усилия связаны с напряжениями следующими соотношениями [3, 6]:

$$\int_{-h}^h \sigma_{ij}(t)zdz + 2\sigma_{ij}^*(t)\delta_{ij}\Delta h = M_{ij}(t), \quad (4)$$

где $\sigma_{ij}^*(t)$ — напряжения в арматуре; $\Delta_{ij} = \mu_{ij} H$ — площадь слоя арматуры; $H = 2h$ — толщина плиты (рис. 1).

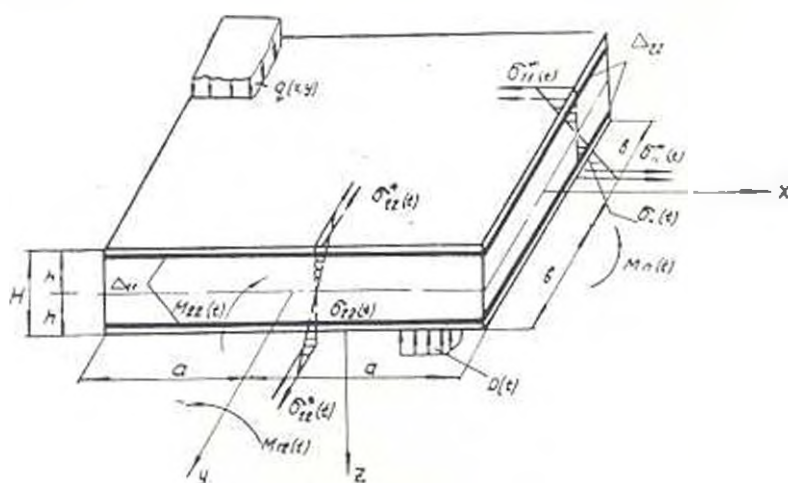


Рис. 1

Используя соотношения (1), выражения деформации бетона (3), уравнение (4) и условие совместности деформаций бетона и арматуры

$$\sigma_{ij}^*(t) = E_i \mu_{ij}(t) \delta_{ij}, \quad (5)$$

получим:

$$M_{ij}(t) = D[(1-\nu)\epsilon_{ij}(t) + \nu x(t)\delta_{ij}] - D \int_{-h}^h [(1-\nu)\epsilon_{ij}(\tau) + \nu x(\tau)\delta_{ij}] R(t, \tau) dz, \quad (6)$$

Здесь $D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость плиты; $x(t) = \epsilon_{11}(t) - \epsilon_{22}(t)$; $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $\rightarrow K(t, \tau)$ и имеет вид [7]

$$R(t, \tau) = \gamma(\tau) - \gamma - \Theta(\tau) \int_0^t \exp \left| - \int_0^t \gamma(z) dz \right| d\tau,$$

где

$$\gamma(\tau) = \gamma[1 + \nu E_0 \varphi(\tau)]; \quad \Theta(\tau) = \gamma'(\tau) + \gamma^2(\tau) - \gamma\gamma(\tau); \quad (7)$$

$E_0 = E/(1-\nu^2)$. В данном случае $\nu = 1$. Уравнение (6) выражает зависимость между компонентами внутренних сил и кривизны при изгибе железобетонной плиты.

2° Пусть упруго-ползучая плита на упруго-ползучем винклеровом основании под действием заданных поперечных сил находится в равновесии. Тогда согласно началу возможных перемещений будем иметь:

$$\delta \Theta(w) = \iint_s \left[M_{11} \delta x_{11} + M_{22} \delta x_{22} + M_{12} \delta x_{12} + k_0 w \delta w - \right. \\ \left. - k_0 \int_{\tau_1}^t w(\tau) \delta w(t) R_1(t, \tau) d\tau \right] dx dy - \delta A(t) = 0, \quad (8)$$

где k_0 — коэффициенты постели; $\delta A(t)$ — приращение работы внешних сил; $R_1(t, \tau)$ — резольвента ядра ${}_1K_1(t, \tau)$, вид которой определяется (7) и (2) заменой характеристик бетона на характеристики грунта C_1, τ_1, A_1, E_1 [8].

Вводя аналогично [2] функцию

$$U(t, \tau) = \frac{D}{2} (x_{11}(t)x_{11}(\tau) + x_{22}(t)x_{22}(\tau) + \\ + \nu [x_{11}(t)x_{22}(\tau) + x_{22}(t)x_{11}(\tau)] + (1 - \nu)x_{12}(t)x_{12}(\tau)) \quad (9)$$

и используя (6), после некоторых преобразований получим:

$$\delta \Theta(w) = \delta \iint_s \left\{ U(t, t) - 2 \int_{\tau_1}^t U(t, \tau) R(t, \tau) d\tau + \right. \\ \left. + \frac{\mu_{11} E_1 H^3}{4} \left[x_{11}^2(t) + \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}} x_{22}^2(t) \right] + \frac{k_0}{2} \left[w^2(t) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2 \int_{\tau_1}^t w(\tau) w(t) R_1(t, \tau) d\tau \right] - A(t) \right\} dx dy = 0. \quad (10)$$

Уравнение (10) выражает вариационное уравнение изгиба симметрично-армированной железобетонной плиты на упруго-ползучем основании.

Возьмем выражение прогиба плиты в виде конечной суммы:

$$w(t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \varphi_i(x, y), \quad (11)$$

где $\varphi_i(x, y)$ — известные функции, удовлетворяющие граничным условиям. Тогда из (10) следует система уравнений

$$\frac{\partial \Theta}{\partial a_k(t)} = 0, \quad (12)$$

из которых определяются неизвестные функции $a_i(t)$. Введем обозначения:

$$\delta_{ik} = \iint_s D \left[\varphi_i' \varphi_k' + \varphi_i'' \varphi_k'' + \nu (\varphi_i' \varphi_k'' + \varphi_i'' \varphi_k') + \right. \\ \left. + 2(1 - \nu) \varphi_i' \varphi_k'' \right] + \frac{\mu_{11} E_1 H^3}{2D} \left(\varphi_i' \varphi_k' + \frac{\mu_{22}}{\mu_{11}} \varphi_i'' \varphi_k'' \right) + \frac{k_0 \varphi_i \varphi_k}{D} dx dy; \quad (13)$$

$$\delta_{ik}^* = \iint_s D [\dot{\psi}_i \dot{\psi}_k + \ddot{\psi}_i \ddot{\psi}_k + \nu (\dot{\psi}_i \ddot{\psi}_k + \ddot{\psi}_i \dot{\psi}_k) + 2(1-\nu) \dot{\psi}_i \dot{\psi}_k] dx dy;$$

$$\delta_{ik}^{**} = k_0 \iint_s \dot{\psi}_i \dot{\psi}_k dx dy; \quad \Delta_{ip} = \iint_s q(x, y) \dot{\psi}_k dx dy.$$

Штрихи и точки при $\dot{\psi}_i$ и $\dot{\psi}_k$ соответственно обозначают производные по x и по y . После преобразований из (12) и (11), используя обозначения (13), получим:

$$\sum_{k=1}^n \left[\dot{\delta}_{ik} a_k(t) - \dot{\delta}_{ik}^* \int_{\tau_1}^t a_k(\tau) L_{ik}(t, \tau) d\tau \right] = \Delta_{ip}, \quad (i = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

где

$$L_{ik}(t, \tau) = R(t, \tau) + c_{ik} R_1(t, \tau); \quad c_{ik} = \frac{\delta_{ik}^{**}}{\delta_{ik}^*}.$$

Система интегральных уравнений (14) представляет уравнения Лагранжа-Ритца для железобетонной плиты на упруго-ползучем основании при учете наследственных свойств ползучести бетона и основания.

3° Вводя матричные обозначения

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{pmatrix};$$

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{1p} \\ \vdots \\ \Delta_{np} \end{pmatrix}; \quad D(t, \tau) = \begin{pmatrix} \delta_{11}^* L_{11}(t, \tau) & \dots & \delta_{1n}^* L_{1n}(t, \tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1}^* L_{n1}(t, \tau) & \dots & \delta_{nn}^* L_{nn}(t, \tau) \end{pmatrix}, \quad (15)$$

систему (14) запишем в виде матричного уравнения

$$A(t) = C + \int_{\tau_1}^t T(t, \tau) A(\tau) d\tau, \quad (16)$$

Решение уравнения (16) имеет вид

$$A(t) = [T + V(t)]C, \quad (17)$$

где

$$C = B^{-1}\Delta; \quad T(t, \tau) = B^{-1}D(t, \tau);$$

$$V(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_{\tau_1}^t T_m(t, \tau) d\tau; \quad (18)$$

$$T_m(t, \tau) = \int_{\tau_1}^t T(t, s) T_{m-1}(s, \tau) ds.$$

4° В качестве приложения рассмотрим шарнирно-опертую симметрично-армированную плиту на упруго-ползучем основании, которая испытывает действие распределенной нагрузки q T/m^2 . Зададимся уравнением поверхности плиты в виде тригонометрического ряда

$$w(t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \cos \frac{\pi(2k-1)x}{2a} \cos \frac{\pi(2k-1)y}{2b}, \quad (19)$$

которое удовлетворяет всем граничным условиям. Вследствие ортогональности функций ψ_l и ψ_k система (14) примет вид:

$$a_k(t) - \alpha_k \int_0^t a_k(\tau) I_k(t, \tau) d\tau = a_k^0, \quad (20)$$

где

$$\alpha_k = \frac{\Delta_{kp}}{\delta_{kk}}, \quad \alpha_k = \frac{\delta_{kk}^*}{\delta_{kk}}.$$

Единичные δ_{kk} , δ_{kk}^* , δ_{kk}^{**} и грузовые Δ_{kp} интегралы определяются по формуле (13).

Если для рассматриваемой железобетонной плиты не учитывать свойства старения бетона и основания, то систему интегральных уравнений (20) можно свести к дифференциальным уравнениям третьего порядка с постоянными коэффициентами вида

$$a_k'''(t) - p_k a_k'(t) + g_k a_k(t) = 0 \quad (21)$$

с начальными условиями:

$$\begin{aligned} a_k(\tau_1) &= a_k^0; \quad a_k'(\tau_1) = a_k^0(\beta_k + \beta_{0k}); \\ a_k''(\tau_1) &= a_k^0[\beta_k - \beta_{0k}^2 - \gamma_1\beta_k - \gamma_{10}\beta_{0k}], \end{aligned} \quad (22)$$

решение которых имеет вид:

$$a_k(t) = C_{k0} + \frac{C_{k1} e^{r_{k1}(t-\tau_1)}}{r_{k1}} + \frac{C_{k2} e^{r_{k2}(t-\tau_1)}}{r_{k2}}, \quad (23)$$

где C_{k0} , C_{k1} , C_{k2} — постоянные интегрирования:

$$r_{k1,2} = \frac{-p_k \pm \sqrt{p_k^2 - 4g_k}}{2} \text{ — корни характеристического уравнения.}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_k^2 &= \\ &= \frac{256 q a^4 b^4}{\pi^4 (2k-1)^4 D \left[(2k-1)^4 \left| a^4 + b^4 + \frac{p_{11} E_1 H^3}{2I} \left(a^4 + b^4 \frac{p_{22}}{p_{11}} \right) \right| + 2a^2 b^2 + \frac{16k_0 a^4 b^4}{\pi^4 D} \right]} \\ \alpha_k &= \frac{(2k-1)^4 [a^4 + b^4 + 2a^2 b^2]}{(2k-1)^4 \left| a^4 + b^4 + \frac{p_{11} E_1 H^3}{2I} \left(a^4 + \frac{p_{22}}{p_{11}} b^4 \right) \right| + 2a^2 b^2 + \frac{16k_0 a^4 b^4}{\pi^4 D}} \end{aligned} \quad (24)$$

Имея решение (23) системы (21), можно определить перпендикулярные перемещения нейтрального слоя плиты согласно (19).

Согласно (5) напряжения в арматуре определяются как

$$\sigma_{11}(t) = E_1 h \sum_{k=1}^n \frac{\pi^2(2k-1)^6}{4a^2} a_k(t) \cos \frac{\pi(2k-1)x}{2a} \cos \frac{\pi(2k-1)y}{2b}. \quad (25)$$

Напряжения в бетоне —

$$\sigma_{11}(t) = E_0 h \sum_{k=1}^n \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4a^2} a_k(t) \cos \frac{\pi(2k-1)x}{2a} \cos \frac{\pi(2k-1)y}{2b} \times \\ \times a_k(t) \left\{ (\nu a^2 + b^2) \left[1 - \frac{\gamma - \bar{\gamma}}{a_k(t)} \int_0^t a_k(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \right] + 3(1 - \nu^2) n_{ij} b^2 \right\}; \quad (26)$$

$$\sigma_{12}(t) = G h \sum_{k=1}^n \frac{\pi^2(2k-1)^2}{4ab} \cos \frac{\pi(2k-1)x}{2a} \cos \frac{\pi(2k-1)y}{2b} a_k(t) \left\{ 1 - \right. \\ \left. - \frac{\gamma - \bar{\gamma}}{a_k(t)} \int_0^t a_k(\tau) e^{-\gamma(t-\tau)} d\tau \right\}, \quad (27)$$

где $n_{ij} = \nu_{ij} E_1 / E$; $G = E / (1 + E) 2$.

Аналогичный вид имеют формулы для $\sigma_{22}(t)$, $\sigma_{21}(t)$.

На основании полученного решения рассматриваемой задачи выполнен численный пример при следующих данных:

$$\begin{aligned} H &= 8 \text{ см}; & C_0 &= 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ см}^2/\text{кг}; & E_1 &= 300 \text{ кг/см}^2; \\ a &= 200 \text{ см}; & E &= 2 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2; & C_1 &= 0,0025 \text{ см}^2/\text{кг}; \\ b &= 250 \text{ см}; & E_1 &= 2 \cdot 10^3 \text{ кг/см}^2; & k_0 &= 5 \text{ кг/см}^3; \\ q &= 1,5 \text{ кг/см}^2; & \nu &= 1/6; & \bar{\gamma}_0 &= 0,037; \\ \gamma &= 0,026; \end{aligned}$$

для трех вариантов процента армирования: 1) $\mu_{11}=0,1$, $\mu_{22}=0,07$; 2) $\mu_{11}=0,07$, $\mu_{22}=0,05$; 3) $\mu_{11}=0,05$, $\mu_{22}=0,025$.

Согласно полученным результатам расчета построены кривые (рисунки 2 ÷ 4) изменения прогибов и напряжений в плите во времени. Прогиб со временем значительно увеличивается вследствие ползучести бетона. С ростом процента армирования величина прогиба заметно

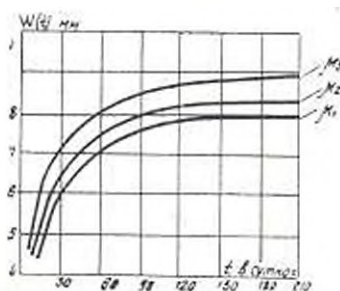


Рис. 2

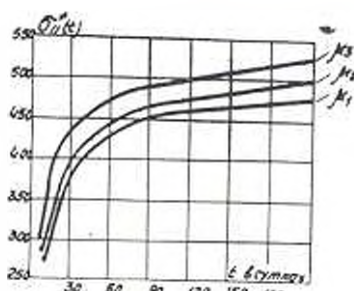


Рис. 3

уменьшается. Перераспределение напряжений в арматуре и бетоне показано на рисунках 3 и 4. Напряжения в арматуре растут, а в бетоне уменьшается. При увеличении процента армирования существенно меняется интенсивность процесса релаксации напряжений. Для рассма-

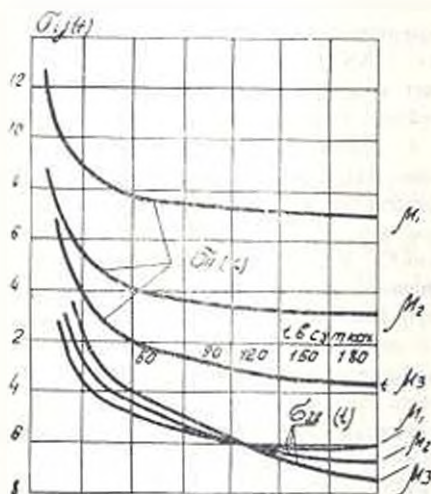


Рис. 4

риваемой железобетонной плиты на упруго-ползучем основании при учете свойств старения бетона и основания для ядер ползучести общего типа интегральные уравнения (20) можно легко с необходимой точностью решить общезвестным методом Крылова-Боголюбова [9].

Краснодарский политехнический институт

Поступило 7.X.1975.

Է. Մ. ԴԱՅՏՈՎԱ

ԱՌԱՋԳԱՍՈՂՈՒՆ ՀԻՄՆԱՏԱԿԻ ՎՐԱ ԴՐՎԱԾ ԱՌԱՋԳԱՍՈՂՈՒՆ, ԿՐԿԱԹՐԵՆՈՆԵ ՍԱԼԻ ՆՌՄԱՆ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Դիտելով տեղափոխումների իրական բաշխման նվազագույն հատկությունները, ստացված է լրիվ էներգիայի արտահայտությունը առաձգա-սողուն իմնատակի վրա դրված առաձգա-սողուն երկաթբետոնե սալի ծռման դեպքում՝ հաշվի առնելով բետոնի և հիմնատակի սողքի ժառանգական հատկությունները: Հետևելով Ռիտցի մեթոդին, կապված է Վոյտերրայի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարումների սխեմով և տրված է նրա լուծումը:

Վարիացիոն մեթոդի ինտեգրալ հավասարումների ստացված սխեմով հիման վրա կատարված է լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակի վերլուծություն գիավող խնդրի համար: Լուծված է իվային օրինակ ամրանավորման սարքեր տոկոսների դեպքում:

ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л. Гостехиздат, 1952.
2. Задоян М. А. О вариационных уравнениях теории ползучести. «Доклады АН АрмССР», 1958, т. 26, № 5.
3. Задоян М. А. О применении вариационных методов теории ползучести при расчете статически неопределимых железобетонных конструкций. «Известия АН АрмССР (серия техн. наук)», т. XXVII, № 1, 1974.
4. Ширинкулов Т. Расчет конструкций на сплошном основании с учетом ползучести. Ташкент, изд-во «Фан», 1969.
5. Курбониязов М. И. К расчету упрямо-ползучих прямоугольных плит на упрямо-ползучем основании. «Известия АН УзССР (серия техн. наук)», № 2, 1973.
6. Гайтова Л. М. О применении вариационного уравнения Кастильяно теории ползучести при анализе усадочных напряжений в железобетонных конструкциях. «Известия АН АрмССР (серия техн. наук)», т. XXVII, № 4, 1974.
7. Гайтова Л. М. Применение вариационного метода теории ползучести при расчете симметрично-армированных железобетонных конструкций на температурно-усадочные воздействия с учетом ползучести бетона. Труды Краснодарского политехнического института, Краснодар, 1974, выпуск 62.
8. Месчан С. Р. Ползучесть глинистых грунтов. Ереван, 1967.
9. Шаецов А. В. Приближенный способ определения собственных напряжений в бетоне с учетом переменности его деформационных свойств. «Гидротехническое строительство», № 8, 1952.