ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXIX, № 1, 1976 Серия технических наук

ГИДРАВЛИКА

С. А. АНАНЯН

ИЗМЕНЕНИЕ МИНЕРАЛИЗАЦИИ ПОЧВЕННОГО РАСТВОРА И ГРУНТОВЫХ ВОД ПРИ КАПИТАЛЬНЫХ ПРОМЫВКАХ

Проблема освоения засоленных земель для развития сельского хозяйства в настоящее время приобретает большое практическое значение. В этой связи в статье дается решение одной задачи о процессе изменения минерализации почвенного раствора и грунтовых вод при капитальных промывках. Аналогичные задачи на практике решаются при помощи известных дифференциальных уравнений физико-химической гидродинамики (уравнение массопереноса) [1—2]:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right)-u\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial t}=\frac{\partial c}{\partial t}; \qquad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}=\alpha\,(c_0-c). \qquad (2)$$

Особенность решения данной задачи заключается в том, что область фильтрации разбивается на две зоны, исходя из физической картины процесса.

Первая зона расположена между поверхностью почвы и уровнем грунтовых вод (зона аэрации), а вторая зона расположена ниже уровня грунтовых вод и простирается на большие глубины (зона грунтовых вод).

Предполагаем, что при промывке уровень грунтовых вод поднимается с постоянной скоростью (начало координат расположено на поверхности почвы, положительная ось x направлена сверху вниз).

Из сказанного видно, что мощность зоны аэрации в течение времени изменяется, благодаря изменению высоты уровня грунтовых вод, которая одновременно является границей двух зон фильтрации. При решении задачи принимаем, что во время капитальных промывок изменения минерализации почвенного раствора в зоне аэрации происходят, во-первых, в результате растворения новых порций солей в почве, а во-вторых, действием промывной воды, которая подается с поверхности почвы. Принимаем, что в зоне аэрации диффузионные переносы солей $\left|\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial c}{\partial x}\right)\right|$ по сравнению с фильтрационным переносом $\left(u\frac{\partial c}{\partial x}\right)$ малы и ими можно пренебречь. В зоне грунтовых вод, наоборот, принимаем, что процесс растворения солей в основном уже имел место в предыдущие периоды времени, и им можно пренебречь. Перенос солей в этой зоне происходит, главным образом, под действием диффузионных процессов, так как скорости фильтрации малы. Это, конечно, в известной степени является допущением.

В силу сказанного, отбрасывая из общих дифференциальных уравнений (1)—(2) диффузионный член, получаем дифференциальное уравнение физико-химической гидродинамики для зоны аэрации. Отбрасывая из этих же уравнений члены, описывающие процесс растворения $\alpha(c_н - c)$ и фильтрационные переносы солей $u\dfrac{\partial c}{\partial x}$, получаем дифференциальное уравнение физико-химической гидродинамики для зоны грунтовых вод, т. е.

$$\frac{\partial c_1}{\partial t} = -u\frac{\partial c_1}{\partial x} + \alpha(c_н - c); \tag{3}$$

$$\frac{\partial c_2}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c_2}{\partial x^2}, \tag{4}$$

где $c_1(x,t)$ и $c_2(x,t)$—концентрация почвенного раствора в зонах аэрации и грунтовых вод, соответственно; $c_н$ — концентрация предельного насыщения; u—скорость фильтрации в зоне аэрации (принимаемая постоянной); α—коэффициент скорости растворения; D—коэффициент конвективной диффузии (принимаемый постоянным); x—вертикальная ось; t—время.

Таким образом, для уравнений (3) и (4) можно сформулировать следующие начальные и граничные условия

$$t=0 \quad c_1=\varphi_1(x), \quad c_2=\varphi_2(x); \tag{5}$$

$$t>0 \quad x=0, \quad c_1=c_р=\mathrm{const}; \tag{6}$$

$$t>0 \quad x\to\infty, \quad \frac{\partial c_1}{\partial x}=0; \tag{7}$$

$$c_1(x_0-vt) = c_2(x_0-vt); \tag{8}$$

$$t_1=t-F(x_0); \qquad F(x_0)=\frac{x}{u}. \tag{9}$$

где x_0—начальная глубина (до промывки) залегания грунтовых вод; $F(x_0)$—время добегания солевого фронта до плоскости x_0; v—скорость подъема уровня грунтовых вод; $c_р$—концентрация солей в промывной воде.

Условие (8) выражает равенство концентраций почвенного раствора и грунтовых вод в любой момент времени, считая от начала подъема уровня грунтовых вод. Нетрудно заметить, что условия (5)—(9) непосредственно вытекают из физической сущности поставленной выше задачи. Условия баланса солей на движущейся границе не ставятся, так как это в определенной степени обусловлено теми допущениями, о которых было сказано выше.

Решение дифференциальных уравнений (3)—(4) с условиями (5)—(8) можно рассматривать как первое приближение на пути решения более общей задачи.

В начальных этапах развития фильтрационных процессов, когда фронт солепереноса еще не доходит до уровня грунтовых вод, т. е. $x < x_0$, $[t < F(x_0)]$, достаточно будет исследовать только уравнение (3). При этом необходимо рассматривать две области:

область перед фронтом солепереноса (область влияния начальных условий);

область за фронтом солепереноса (область влияния граничных условий).

В уравнении (3) сделаем замену переменных, полагая

$$c_1 - c_n = H(x,t)e^{-af(x)}. \qquad (10)$$

Тогда (3) можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -u\,\frac{\partial H}{\partial x}. \qquad (11)$$

Начальные и граничные условия для функции $H(x, t)$ соответственно будут:

$$t = 0 \quad H = [\varphi_1(x) - c_n]e^{af(x)}; \qquad (12)$$

$$x = 0 \quad H = c_p - c_n. \qquad (13)$$

Общее решение уравнения (11) с учетом (12) и (13) можно представить в следующем виде:

$$c_1 = c_n + [\psi[t - F(x)]]e^{-af(x)}. \qquad (14)$$

Значение произвольной функции ψ для каждой области определяется отдельно.

а) Область перед фронтом солепереноса.

Для этой области $\psi[t - F(x)]$ определяется из начальной эпюры распределения солей в почвенном растворе

$$c_1 = c_n + \varphi_1(x - ut)e^{-at} - c_n e^{-at}. \qquad (15)$$

В частном случае, при постоянном значении $\varphi_1(x) = c_0$, будем иметь:

$$c_1 = c_n + (c_0 - c_n)e^{-at}. \qquad (16)$$

б) Область позади фронта солепереноса.

Значение функции $\psi[t - F(x)]$ для этой области определяется из граничного условия на поверхности почвы, т. е.

$$x = 0 \quad \psi(t) = c_{\text{п}} - c_{n}\,. \tag{17}$$

С учетом сказанного, решение уравнения (3) можно представить в виде

$$c_1 = c_n + (c_{\text{п}} - c_n)e^{-\alpha t}. \tag{18}$$

Когда фронт солепереноса достигает уровня грунтовых вод, изменения концентрации почвенного раствора в зоне аэрации и минерализации грунтовых вод можно определить из уравнений (3) и (4) после их совместного решения. При этом для уравнения (4) граничным условием (в момент времени $t = x_0/u$) будет зависимость (16), а $\varphi_1(x)$, определяемое зависимостью (5), будет начальным условием. При $t > x_0/u$ мощность зоны аэрации изменяется по закону

$$x = x_0 - v[t - F(x_0)]. \tag{19}$$

На поверхности $x = x_0$ выражение (15) примет следующий вид:

$$c_1 = c_{\text{п}} + e^{-\alpha t}\varphi_1(x_0 - ut) - c_n e^{-\alpha t} = K(t), \tag{20}$$

где $\varphi_1(x_0 - ut)$ значение функции c_1 при $t = 0$ (в частном случае можно принять постоянной, равной $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = c_0$). Это и будет окончательное выражение граничного условия для уравнения (4) в момент времени $t = x_0/u$.

Решение дифференциального уравнения (4) при начальном и граничном условиях (5) и (20) будем искать в виде суммы двух функций, т. е.

$$c_2(x, t) = \gamma_1(x, t) + \gamma_2(x, t) \tag{21}$$

при следующих граничных и начальных условиях:

$$x = x_0 \quad \gamma_1(x_0, t) = 0; \tag{22}$$

$$t = 0 \quad \gamma_1(x, 0) = \varphi_2(x); \tag{23}$$

$$x = x_0 \quad \gamma_2(x_0, t) = K(t); \tag{24}$$

$$t = 0 \quad \gamma_2(x, t) = 0. \tag{25}$$

Окончательно, решение дифференциального уравнения (4) с учетом условий (22)—(25) можно представить в следующем виде [3]:

$$c_2(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x - x_0 - \xi)^2}{4a^2 t} \right] - \exp\left[-\frac{(x - x_0 + \xi)^2}{4a^2 t} \right] \right\} \varphi_2(\xi)\, d\xi +$$

$$+ \frac{x - x_0}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{t} \exp\left[-\frac{(x - x_0)^2}{4a^2(t - \tau)} \right] \cdot (t - \tau)^{-3/2} K(\tau)\, d\tau; \tag{26}$$

при $\varphi_2(\xi) = c_0$

$$c_2(x,\ t) = \frac{2c_0}{\sqrt{\pi}}\left[\Phi_1\left(\frac{x-x_0}{2a\sqrt{t}}\right) - \Phi_2\left(\frac{x-x_0}{2a\sqrt{t}}\right)\right] + \frac{x-x_0}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^t \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \times$$

$$\times (t-\tau)^{-3/2} K(\tau)\, d\tau, \tag{27}$$

где $\varphi_2(\xi)$ и $K(\tau)$ определяется из уравнений (5) и (20); $a = \sqrt{D}$. В последующие моменты времени $t > x_0/u$, т. е. когда начнется подъем уровня грунтовых вод со скоростью v, решение дифференциального уравнения будем искать по изложенному выше методу при граничном условии (8), т. е.,

$$c_1 = c_2 = c_п + (c_р - c_п)\exp\left[-\frac{x_0 - vt + vx_0/u}{u}\right], \tag{28}$$

и начальном условии (26).

Для решения уравнения (4) введем новую переменную

$$y = x - x_0 - vf'(x_0) - vt, \tag{29}$$

а функцию $c_2(x,\ t)$ будем искать в виде

$$c_2(x,\ t) = A(y,\ t)\exp\left[-\frac{v}{2a^2}(y + vt/2)\right]. \tag{30}$$

Подставляя (30) в (4), нетрудно показать, что $A(y,\ t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial A}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}. \tag{31}$$

Нетрудно заметить, что при переходе от переменной x к переменной y подвижную границу (уровень грунтовых вод) условно превращаем в неподвижную. Это и позволяет решение уравнения (31) искать по изложенному выше методу.

Начальное условие $A(y,\ x_0/u)$ и граничное условие $A(0,\ t)$ для функции определяется из подстановки (29)

$$A(y,\ t) = c_2(x,\ t)\exp\left[\frac{v}{2a^2}(y + vt/2)\right] \tag{32}$$

после замены $c_2(x,\ t)$ соответствующими выражениями (26), (28).

Решение дифференциального уравнения (31) ищем в виде суммы двух неизвестных функций, т. е.

$$A(y,\ t) = A_1(y,\ t) + A_2(y,\ t), \tag{33}$$

при следующих начальных и граничных условиях:

$$A_1(y,\ x_0/u) = A(y,\ x_0/u); \tag{34}$$

$$A_1(0, t) = 0; \tag{35}$$

$$A_2(y, x_0/u) = 0 \tag{36}$$

$$A_2(0, t) = A(0, t). \tag{37}$$

Окончательное решение можно представить в следующем виде:

$$A(y, t) = \frac{1}{2a\sqrt{t - \frac{x_0}{u}}} \int_0^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(y-\xi)^2}{4a^2\left(t - \frac{x_0}{u}\right)} \right] - \exp\left[-\frac{(y+\xi)^2}{4a^2\left(t - \frac{x_0}{u}\right)} \right] \right\} A(\xi)d\xi + \frac{y}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t A(0, \tau)\left(t - \tau - \frac{x_0}{u}\right)^{-3/2} \times$$

$$\times \exp\left[-\frac{y^2}{4a^2\left(t - \tau - \frac{x_0}{u}\right)} \right] d\tau, \tag{38}$$

где $A(0, \tau)$ определяется из выражения

$$A(0, \tau) = \left[c_n + (c_p - c_n)\exp\left(-\alpha \frac{x_0 - vt + v\frac{x_0}{u}}{u} \right) \right] \exp\left(\frac{v^2}{4a^2} t \right), \tag{39}$$

а $A\left(\xi, \frac{x_0}{u}\right)$ из выражений (26) или (27) и (30) после замены y на ξ:

$$A\left(\xi, \frac{x_0}{u}\right) = \exp\left[\frac{v}{2a^2} y + \frac{v^2}{4a^2} \cdot \frac{x_0}{u} \right] \left\{ \frac{2c_0}{\sqrt{\pi}} \left[\Phi_1\left(\frac{\xi}{2a\sqrt{\frac{x_0}{u}}} \right) - \Phi_2\left(\frac{\xi}{2a\sqrt{\frac{x_0}{u}}} \right) \right] + \frac{\xi}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^{x_0/u} \exp\left[-\frac{\xi^2}{4a^2\left(\frac{x_0}{u} - \tau\right)} \right] \cdot \left(\frac{x_0}{u} - \tau \right)^{-3/2} K(\tau)d\tau \right\}. \tag{40}$$

После перехода от переменной y к переменной x:

$$x = y + x_0 + v\frac{x_0}{u} - vt; \tag{41}$$

$$x = x_0 + y. \tag{42}$$

окончательное решение задачи (при принятом экспоненциальном законе распределения концентраций $\varphi_{1,2}(x) = c_{1,2}\exp(\alpha_{1,2} x)$, где α_1 и α_2 — постоянные, которые определяются из начальной эпюры распределения концентраций в зонах аэрации и грунтовых вод) можно представить в следующем виде:

$$c_2(x, t) = c_n f(z, T), \tag{43}$$

где

$$f(z, T) = \frac{p}{2\sqrt{\pi T}} \exp(b^2 + 2s^2 rz + s^2 r^2 T) \int_0^{\infty} \exp(-2srx) \times$$

$$\times \left\{ \exp\left[-\frac{(sz + srT - x)^2}{T} \right] - \exp\left[-\frac{(sz + srT + x)^2}{T} \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \exp(-2bx)\left[1 + \Phi(x - b) \right] - \exp(2bx)\left[1 - \Phi(x + b) \right] \right\} dx +$$

$$+ \frac{\exp\left(-\frac{s^2 z^2}{T}\right)}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \left\{ \frac{z + 2rT}{\sqrt{T(T+1)}} s \exp\left[\frac{(z + 2rT)^2}{T(T+1)} s^2 x^2 \right] \left[1 - \Phi\left(\frac{z + 2rT}{\sqrt{T(T+1)}} sx \right) \right] +$$

$$+ \frac{z}{\sqrt{T(T+1)}} s \exp\left[\frac{z^2}{T(T+1)} s^2 x^2 \right] \left[1 + \Phi\left(\frac{z}{\sqrt{T(T+1)}} sx \right) \right] \right\} \left\{ 1 - \right.$$

$$\left. - \exp\left(-\gamma + \gamma \frac{Tx^2}{T + 1 - x^2} \right) \cdot \left[1 - q \exp\left(-k \frac{Tx^2}{T + 1 - x^2} \right) \right] \right\} (T +$$

$$+ 1 - x^2)^{-1/2} x dx + \frac{z + rT}{\sqrt{\pi T}} s \exp\left[2s^2 r(z + rT - r^2 s^2) \right] \times$$

$$\times \int_0^1 \exp\left[-(z + rT)^2 \frac{s^2}{Tx} - r^2 s^2 Tx \right] \{ 1 + (\bar{u} - 1) \exp[-\gamma(1 + r) +$$

$$+ \gamma r T(1 - x)] \} x^{-3/2} dx; \tag{44}$$

$$t > \frac{x_0}{u}; \quad x > x_0 - v\left(t - \frac{x_0}{u}\right); \quad z = \frac{x}{x_0} - 1; \quad T = \frac{u}{x_0} t - 1;$$

$$q = \frac{c_1(0,0)}{c_n}; \quad p = \frac{c_2(x_0, 0)}{c_n}; \quad \bar{u} = \frac{c_0}{c_n}; \quad r = \frac{v}{u}; \quad s^2 = \frac{u x_0}{4D};$$

$$\gamma = \alpha \frac{x_0}{u}; \quad k = \varkappa_1 x_0; \quad b = \varkappa_2 x_0 \sqrt{\frac{D}{u x_0}}.$$

Интегралы, входящие в (44), решены численным методом на ЭВМ при значениях параметров: $x_0 = 3 м$; $q = 0{,}6$; $p = 0{,}3$; $u = 0{,}01$ м/сут; $r = 0{,}5$; $s = 0{,}47$; $\gamma = 0{,}1$; $k = 1{,}48$; $b = 0{,}72$ — характерных для условий Араратской равнины.

В таблице для примера приведены значения $f(z, T)$ для различных периодов времени для одной характерной точки ($x = 2{,}8 м$).

t, сутки	x, м	$f(z, T)$
120	2,8	0,864
140	2,8	0,71
180	2,8	0,58
200	2,8	0,52

Аналогичные расчеты были выполнены и при других значениях параметров, глубин и времени.

При значениях $(z+rT)>3$, $T<0{,}4$ решение задачи можно представить в следующем виде:

$$c_2(x, t)=\frac{c_2(x_0, 0)}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{e^{-s^2(z+rT)^2-r^2s^2T}}{s(z+rT)+b}+\frac{c_1(0, 0)\sqrt{T+1}}{sz\sqrt{\pi}}e^{-k-\frac{s^2z^2}{T+1}}+$$

$$+\frac{2c_n s(z+rT)}{T\sqrt{\pi}}e^{-s^2(z^2-r^2T^2)-r^2s^2(T-1)}\left[1+\left(\frac{c_p}{c_n}-1\right)e^{[illegible]}\right]. \qquad (45)$$

При $z\gg 1$, rT; T 1 решение задачи сильно упрощается и принимает вид

$$c_2(x, t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-s^2z^2}}{sz}\left\{-\frac{c_2(x_0, 0)}{2}+c_1(0, 0)e^{-k}+\frac{2c_n}{T}s^2z^2\right\}. \qquad (46)$$

По формуле (46) нетрудно определить изменения концентрации в зоне грунтовых вод при капитальных промывках, а изменения концентрации почвенного раствора определяются по формулам (15)—(16).

ЕрПИ им. К. Маркса Поступило 23.XII.1975

Ս. Ա. ԱՆԱՆՅԱՆ

ԲՆԱՀՈՂԱՅԻՆ ԼՈՒԾՈՒՅԹԻ ԵՎ ԳԵՏՆԱՋՐԵՐԻ ՀԱՆՔԱՅՄԱՆ ՓՈՓՈԽՈՒԹՅՈՒՆԸ ԿԱՊԻՏԱԼ ԼՎԱՑՈՒՄՆԵՐԻ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ամփոփում

Հոդվածում տրված է ֆիզիկա-քիմիական հիդրոդինամիկայի մի գործնական խնդրի լուծումը: Խնդիրը վերաբերվում է բնահողում աղերի լուծման հարցին և ֆիլտրացիոն պրոցեսների ժամանակ բնահողային լուծույթի կոնցենտրացիայի ու գետնաջրերի հանքայնացման փոփոխությանը:

Լուծված խնդրի առանձնահատկությունը կայանում է նրանում, որ հաշվի են առնված գետնաջրերի մակարդակի փոփոխությունները կապիտալ լվացումների ժամանակ, մակարդակ, որը սահման է հանդիսանում ֆիլտրացիայի

երկու գոտիների միջև։ Ստացված են բանաձևեր, որոնց օգնությամբ կարելի է որոշել բնահողային լուծույթի կոնցենտրացիաները և գրունտաջրերի հանքացումները ֆիլտրացիայի տիրույթի ցանկացած կետում ժամանակի ցանկացած պահին։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Веригин Н. Н.* Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники. Известия АН СССР, ОТН, 1953, № 10.
2. *Аверьянов С. Ф.* Некоторые вопросы предупреждения засоления орошаемых земель и меры борьбы с ними в Европейской части СССР. В кн.: «Орошаемое земледелие в Европейской части СССР», Изд. «Колос», М., 1965.
3. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М., 1972.