

ГИДРАВЛИКА

Р. М. РАФАЭЛЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ В СИСТЕМЕ НАСОС-ТРУБОПРОВОД

Рассматривается переходный процесс в системе насос-трубопровод, вызванный остановкой насоса вследствие отключения электроэнергии. При отсутствии обратного клапана на линии переходный процесс в системе в большинстве случаев последовательно протекает в трех режимах: насосном, тормозном и турбинном. С работой насоса в этих режимах тесно связаны явления гидравлического удара в водоводе.

Существующие методы расчета гидравлического удара относятся к определению изменений давления и расхода в трубопроводе, а также определению изменения числа оборотов и момента на валу колеса [1-3].

Обычно указанные величины определяются либо путем использования уравнений «упругого» гидравлического удара, либо уравнения «жесткого» гидравлического удара. Исследования показывают [2], что в случае коротких водоводов результаты расчетов по этим методам оказываются близкими друг к другу.

Для этих водоводов преимуществом расчета по уравнению «жесткого» гидравлического удара является значительная простота программы, составленной для ЭВМ.

В основу расчета нами положено совместное интегрирование уравнения движения несжимаемой жидкости и уравнения вращения колеса насоса. Замыкают систему соотношения, связывающие изменение момента и напора с числом оборотов и расходом Q насоса.

Уравнения, описывающие процесс, следующие:

уравнение движения несжимаемой жидкости в трубопроводе

$$\frac{dQ}{dt} + \lambda \frac{Q|Q|}{2Sd} = \frac{P_0 - P_{\text{ат}} - P_{\text{ст}}}{\rho l} S, \quad (1)$$

уравнение вращения колеса насоса

$$I \frac{d\omega}{dt} = M_1 - M_2, \quad (2)$$

и соотношения, аппроксимирующие статические четырехквadrантные

характеристики насоса, которые принимаются справедливыми для переходного процесса [2, 4]:

$$\begin{aligned} \frac{H}{n^2} &= f\left(\frac{Q}{n}\right); \quad \frac{M_c}{n^2} = \psi\left(\frac{Q}{n}\right); \\ \frac{H}{n^2} &= A\left(\frac{Q}{n}\right)^2 + B\frac{Q}{n} + C; \\ \frac{M_c}{n^2} &= A_1\left(\frac{Q}{n}\right)^2 + B_1\frac{Q}{n} + C_1. \end{aligned} \quad (3)$$

В приведенных уравнениях

Q — расход, H — напор колеса, равный

$$H = \left(\frac{p_n}{\gamma} + \frac{z_n^2}{2g} + z_n \right) - \left(\frac{p_{ac}}{\gamma} + \frac{z_{ac}^2}{2g} + z_{ac} \right), \quad (4)$$

p_n , p_{cr} , p_{at} — давления (у насоса, статическое и атмосферное), ρ — плотность воды, λ — коэффициент сопротивления, d , L — диаметр и длина трубопровода, S — площадь поперечного сечения трубопровода, ω — угловая скорость вращения, I — момент инерции.

Пусть при установившемся режиме работы насосной станции происходит аварийное отключение электропитания к двигателю насоса. Это означает, что движущий момент M_c на валу насоса падает от номинального значения до нуля. Для тихоходных колес это изменение совершается за короткий промежуток времени. Полагая в уравнении (2) $M_c = 0$, для исследуемых режимов (насосный, тормозной и турбинный) уравнения (1)–(4) сводятся к системе динамических уравнений вида

$$\frac{dQ}{dt} = a_i Q^2 + b_i Q \omega + c_i \omega^2 + K_i, \quad (5)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = a_{i+1} Q^2 + b_{i+1} Q \omega + c_{i+1} \omega^2, \quad (i = 0, 2, 4)$$

Для каждого режима коэффициенты a_i , b_i , c_i и a_{i+1} , b_{i+1} , c_{i+1} определяются через параметры гидромеханической системы. Для насосного режима:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\gamma AS}{\rho L} - \frac{\lambda}{2Sd}; \quad a_1 = -\frac{A_1}{I}; \quad K_0 = \frac{p_{ac} - p_{at} - p_{cr}}{\rho L} S; \\ b_0 &= \frac{30\gamma SB}{\pi \rho L}; \quad b_1 = -\frac{30B_1}{\pi I}; \quad c_0 = \frac{900\gamma SC}{\pi^2 \rho L}; \quad c_1 = -\frac{900C_1}{\pi^2 I}. \end{aligned}$$

Система (5) решена на ЭВМ и определены изменения: расхода $Q(t)$, угловой скорости $\omega(t)$, давления $p_n(t)$ и момента на валу насоса в

насосном, тормозном и турбинном режимах. Результаты расчетов и сопоставление с экспериментом по отключению центробежного насоса 4К-12 от сети приведены на рисунках 1 и 2.

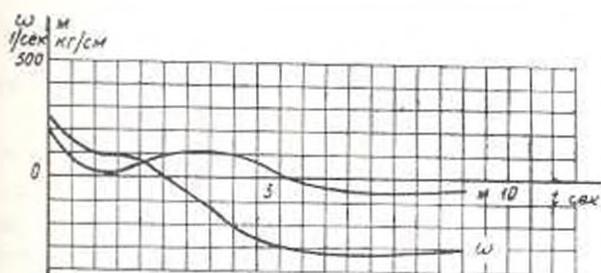


Рис. 1. Изменение угловой скорости и крутящего момента

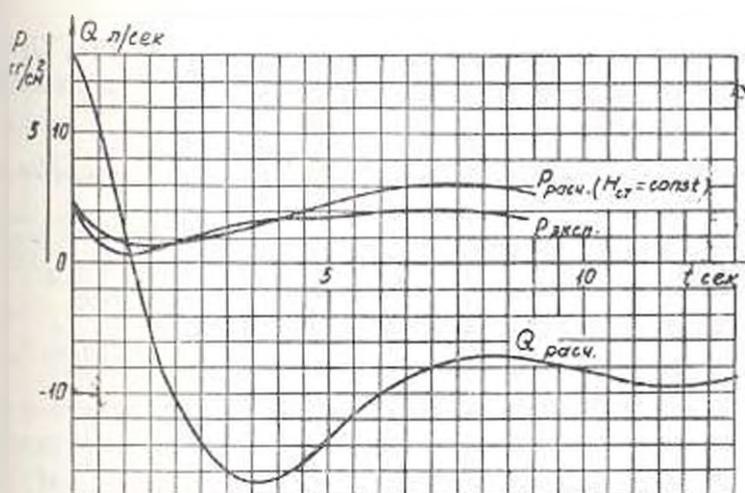


Рис. 2. Изменение расхода и давления в трубопроводе

Определенный интерес представляют аналитические решения систем уравнений (5). Как известно, решения системы (5) не всегда находятся в квадратурах. Задача существования интегральных кривых уравнения вида

$$\frac{d\omega}{dQ} = \frac{a_{1+1}Q^2 + b_{1+1}Q\omega + c_{1+1}\omega^2}{a_1Q^2 + b_1Q\omega + c_1\omega^2 + K_1} = \frac{P(Q, \omega)}{R(Q, \omega)} \quad (6)$$

рассмотрена в [5]. К такому виду могут быть приведены уравнения системы (5). Применяя лемму, доказанную в [5], можно найти решения уравнения (6). Например, частным решением является линейная функция

$$Q = \frac{A_2}{B_1}\omega + M_2 \quad (7)$$

При этом коэффициенты уравнения (7) должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_2}{B_2}\right)^2 a_1 + (b_1 - a_0) \left(\frac{A_2}{B_2}\right)^2 + (c_1 - b_0) \frac{A_2}{B_2} - c_0 &= 0; \\ 2a_2 \left(\frac{A_2}{B_2}\right)^2 + (b_1 - 2a_0) \frac{A_2}{B_2} - b_0 &= 0; \\ a_1 M_1^2 \frac{A_2}{B_2} - a_0 M_1^2 - K_0 &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

В случае совместности системы (8) легко можно определить неизвестные коэффициенты A_2 , B_2 , и M_2 . При этом, если состояние системы в плоскости ω, Q удовлетворяет соотношению (7), то, используя систему (5), квадратурой определяется изменение расхода $Q(t)$ и угловой скорости $\omega(t)$.

Если интегральные кривые выражаются в виде $F(\omega, Q) = \omega^2 + A_3 \omega Q - B_3 Q^2 + E_3 = 0$, то коэффициенты A_3 , B_3 и E_3 должны удовлетворять условиям:

$$\begin{aligned} A_3^2 c_0 + A_3 a_0 - 3A_3 B_3 c_0 - A_3 b_1 + 2B_3 b_0 - 2B_3 c_1 + A_3^2 c_1 - A_3^2 b_0 + 2a_1 &= 0; \\ A_3 K_0 - 2E_3 C_1 - A_3 E_3 c_0 &= 0; \\ 2B_3 K_0 - E_3 b_1 + E_3 A_3 c_1 - E_3 A_3 b_0 - 2E_3 c_0 B_3 + E_3 A_3^2 c_0 &= 0; \\ A_3 a_1 + 2B_3 a_0 - 2B_3 b_1 + A_3 B_3 c_1 - A_3 B_3 b_0 - 2c_0 B_3 + A_3^2 c_0 B_3 &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Для наглядного представления явления, протекающего в системе насос-трубопровод после отключения привода, проведем качественный анализ дифференциальных уравнений (5) методом «двух изоклин» [6]. Суть метода заключается в исследовании проведения изоклин в тех или иных квадрантах плоскости (Q, ω) и в определении знаков правых частей уравнений (5) между изоклинами. Наклон интегральных кривых между изоклинами в плоскости Q, ω определяется знаком $\frac{d\omega}{dQ}$. Например, в насосном режиме между изоклинами нуля

$P(Q, \omega) = 0$ и бесконечности $R(Q, \omega) = 0$ имеем $(--)$, тогда $\frac{d\omega}{dQ} > 0$,

а между изоклиной ∞ и осью ω имеем $(-+)$, т. е. $\frac{d\omega}{dQ} < 0$. В

скобках слева указан знак правой части уравнения $\frac{d\omega}{dt} = f(\omega, Q)$,

справа — правой части уравнения $\frac{dQ}{dt} = \varphi(\omega, Q)$. Таким образом, в на-

сосном режиме интегральные кривые при пересечении с изоклиной ∞ меняют отрицательный наклон на положительный.

Направления вдоль интегральных кривых при $t \rightarrow \infty$ для каждого режима определяются из рассмотрения уравнений (5) с учетом знаков их правых частей. Например, в области, заключенной между осью ω и изоклиной ∞ , $\frac{d\omega}{dt} < 0$, а $\frac{dQ}{dt} > 0$. Тогда при возрастании t в этой области угловая скорость уменьшается, а расход Q увеличивается.

Аналогичным образом для всех режимов определены направления вдоль интегральных кривых; результаты приведены на рис. 3. Картина поведения кривых позволяет судить о всевозможных режи-

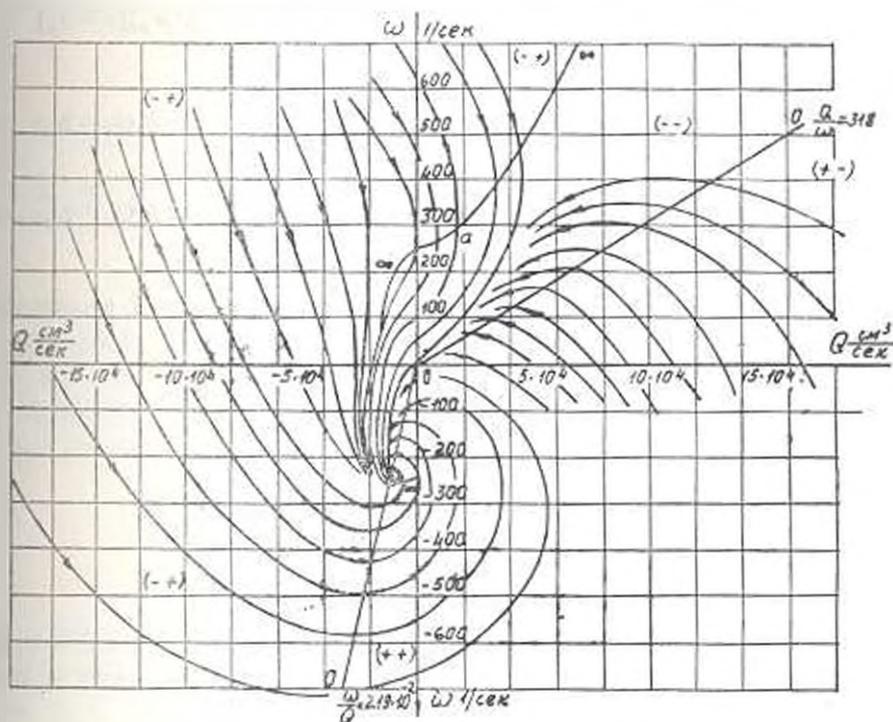


Рис. 3. Интегральные кривые в плоскости ω, Q .

мах работы системы насос—трубопровод и выяснить характер поведения этой системы после аварийного отключения электронитания.

Если отключению привода предшествовал насосный режим ($\omega_0 > 0, Q_0 > 0$) (точка a на рис. 3), то после этого система последовательно проходит насосный, тормозной и турбинный режимы и достигает состояния равновесия в точке d .

Если аварийному отключению предшествовал режим ($\omega_0 > 0, Q_0 < 0$) или ($\omega_0 < 0, Q_0 < 0$), то система также достигает состояния равновесия в точке d .

Таким образом, независимо от начальных условий (ω_0, Q_0) система насос—трубопровод стремится к равновесию в турбинном режи-

ме в определенной точке. Указанная точка является особой точкой типа устойчивого фокуса. В ее окрестности можно получить аналитические решения. Пусть Q_* , ω_* — координаты особой точки. Введем вместо переменных Q , ω новые переменные η и ξ , рассматривая их как смещения относительно положения равновесия, тогда

$$Q = Q_* + \eta; \quad \omega = \omega_* + \xi. \quad (10)$$

Разложив в ряд функции $R(Q, \omega)$ и $P(Q, \omega)$ в окрестности точки Q_* , ω_* и ограничиваясь линейными членами разложения, получим:

$$R(Q, \omega) = (2a_1 Q_* + b_4 \omega_*) (Q - Q_*) + (b_1 Q_* + 2c_1 \omega_*) (\omega - \omega_*);$$

$$P(Q, \omega) = (2a_2 Q_* + b_3 \omega_*) (Q - Q_*) + (b_2 Q_* + 2c_2 \omega_*) (\omega - \omega_*),$$

где

$$\left(\frac{\partial R}{\partial Q} \right)_{Q_*, \omega_*} = 2a_1 Q_* + b_4 \omega_* = a_0; \quad \left(\frac{\partial R}{\partial \omega} \right)_{Q_*, \omega_*} = b_1 Q_* + 2c_1 \omega_* = b_0;$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial Q} \right)_{Q_*, \omega_*} = 2a_2 Q_* + b_3 \omega_* = c_0; \quad \left(\frac{\partial P}{\partial \omega} \right)_{Q_*, \omega_*} = b_2 Q_* + 2c_2 \omega_* = d_0.$$

Переходя от переменных Q , ω к переменным η , ξ в линеаризованных уравнениях, получим:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{a_0 \eta + b_0 \xi}{c_0 \eta + d_0 \xi}. \quad (11)$$

А. М. Ляпунов показал, что если оба корня уравнения

$$\begin{vmatrix} a_0 - i & b_0 \\ c_0 & d_0 - i \end{vmatrix} = 0$$

имеют отличные от нуля действительные части, то исследование уравнений первого приближения (11) всегда дает правильный ответ на вопрос об устойчивости состояния равновесия в системе [7].

После введения переменной $u = \eta/\xi$ уравнение (11) сводится к уравнению

$$\xi \frac{du}{d\xi} = \frac{b_0 + (a_0 - d_0)u - c_0 u^2}{c_0 u + d_0}, \quad (12)$$

общим решением которого будет:

$$\left(\frac{-2c_0 u - (a_0 - d_0) - \sqrt{\Delta}}{-2c_0 u - (a_0 - d_0) + \sqrt{\Delta}} \right)^{\frac{a_0 - d_0}{2\sqrt{\Delta}}} \left[b_0 + (a_0 - d_0)u - c_0 u^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \xi C$$

или в переменных Q , ω

$$\left[\begin{array}{c} -2c_0 \frac{Q-Q_*}{\omega-\omega_*} + (a_0-d_0) - \sqrt{-\Delta} \\ -2c_0 \frac{Q-Q_*}{\omega-\omega_*} + (a_0-d_0) + \sqrt{-\Delta} \end{array} \right] \frac{a_0+d_0}{2\sqrt{-\Delta}} \left[b_0 + (a_0-d_0) \left(\frac{Q-Q_*}{\omega-\omega_*} \right) - \right. \\ \left. - c_0 \left(\frac{Q-Q_*}{\omega-\omega_*} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = C(\omega-\omega_*), \quad (13)$$

где $\Delta = 4a_0c_0 - b_0^2 < 0$.

Решение (13) описывает поведение интегральных кривых плоскости Q, ω в окрестности особой точки.

Линеаризованная система уравнений

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = a_0\zeta_1 + b_0\zeta_2, \quad \frac{d\zeta_2}{dt} = c_0\zeta_1 - d_0\zeta_2$$

допускает решения в виде функций:

$$\zeta_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}; \quad \zeta_2 = \alpha_2 e^{\lambda_1 t}.$$

При этом общее решение определяется в зависимости от значений корней $\lambda_{1,2}$ характеристического уравнения. Если корни характеристического уравнения комплексные ($\lambda_{1,2} = p \pm qi, q \neq 0$), что, в частности, имеет место в рассматриваемом примере, то общим решением рассматриваемой системы будет:

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= Q - Q_* = e^{pt}(C_1 \cos qt - C_2 \sin qt); \\ \zeta_2 &= \omega - \omega_* = e^{pt}(C_1' \cos qt + C_2' \sin qt). \end{aligned} \quad (14)$$

Выражения (14) определяют изменения расхода $Q(t)$ и угловой скорости $\omega(t)$ в турбинном режиме в окрестности точки равновесия Q_*, ω_* .

Рассмотренный пример относится к случаю, когда после отключения электроэнергии опорожнение воды через насос совершалось при постоянном статическом напоре. Это соответствует случаю наличия в конце насосостатической линии резервуара большой емкости. Если резервуар имеет ограниченную емкость, то при тормозном и турбинном режимах происходит истечение воды через насос под действием уменьшающегося напора. Для описания переходного процесса в этом случае необходимо к уравнениям (1)–(4) прибавить соотношение, выражающее изменение длины заполненной части трубопровода. Исследование этих уравнений показало, что при $t \rightarrow t_k, Q \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow 0$.

Таким образом, указанные особенности динамической системы дифференциальных уравнений обуславливают состояние равновесия в

системе насос-трубопровод. Этот вывод позволяет простыми вычислениями, которые зачастую сводятся к решению квадратных уравнений, определять разгонные обороты n_* и соответствующий расход Q_* .

Вычисленное по этому методу значение числа оборотов в турбинном режиме оказывается близким к его номинальному значению в насосном режиме. Это обстоятельство позволяет, в определенных случаях после соответствующих расчетов сальниковых и тормозных устройств, с целью снижения давления гидравлического удара отказаться от применения обратного клапана.

Автор выражает благодарность С. С. Григоряну за ценные советы и убеждение работы.

АрмИИИВПНИ

Поступило 17 II 1975

Ռ. Մ. ՐԱՓԱԶԵԼՅԱՆ

ՉԶԱՍՏԱՏՎԱԿ ԳԱՐԺՄԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԻ ՊԻՈՒՊ-ԽՈՂՈՎԱԿԱՇԱՐՍԻ ՍԻՍՏԵՄՈՒՄ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Հետազոտված է շահատառված շարժումը պոմպ-խողովակաշար սխառեմում, հողովակաշարի վրա հետադարձ փականի բացակայության դեպքում պրոցեսը սխառեմում ընթանում է պոմպային, արդիակային և տուրբինային սեփմաներով: Այդ աշխատանքային սեփմաների հետ են կապված հիդրավիկական հարվածի երևույթները խողովակաշարում և պոմպի ամրության հաշվարկները:

Ոգտագործելով պոմպի անփոփ շարժման և անսեղմնյի հեղուկի հափասարումները, ապա՝ պոմպը բնութագրող հափասարումները դիտվող սեփմաների համար, ստացվել են դինամիկական հափասարումների սխառեմներ: Հետազոտվել ու լուծվել են այդ հափասարումների սխառեմները և բացահայտված են անկյունային արագության, էլքի ու ճնշման փոփոխությունները բառ ժամանակի Ցույց է տրված, որ տուրբինային սեփմում դոլայնային ունի ֆոկուսի տիպի հատուկ կետ: Տրված է դիֆերենցիալ հափասարումների սրակական վերլուծությունը, որն ընդգրկում է սխառեմում տեղի ունեցող բոլոր երևույթները:

ЛИТЕРАТУРА

1. Указания по защите водоводов от гидравлического удара. М., 1961.
2. Герасимов Г. Г. Расчет и исследования переходных процессов в насосных установках с короткими водоводами. Диссертационная работа. Ново, 1973.
3. Parmakian J. Pressure surges at large pump installations. „Transactions of the ASME“, vol. 75, 1953.
4. Находкин Б. И. Круговая характеристика насоса. «Гидротехника и мелиорация», № 6, 1956.
5. Дрижкова Г. А. «Дифференциальные уравнения», т. IV, № 8, 1968.
6. Маркосян С. А. «Изв. высших учебных заведений. Математика», № 1 (8), 1959.
7. Андронко А. А. Теория колебания. М., 1959.