

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

М. А. ЗАДЖАН, Л. А. ЛЕВОЯН

ПЛАСТИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО
 СТЕРЖНЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ
 СОВМЕСТНОМ КРУЧЕНИИ И ИЗГИБЕ

Задача пластического состояния призматических стержней при совместном изгибе и кручении для идеально пластического материала рассматривалась Хангьяианом [1], Хиллом [2], Пиехником и Жичковским [3, 4]. В работе Минлера и Мэлверка [5] дан численный анализ задачи для стержней квадратного сечения из специального вида упрочняющегося материала, подвергнутых кручению и изгибу в одной из плоскостей симметрии сечения. Задача совместного изгиба и кручения стержней в связи с вопросами установившейся ползучести рассмотрена в работах [6, 7].

В настоящей статье рассматривается напряженное состояние призматического стержня прямоугольного сечения из несжимаемого упрочняющегося материала, находящегося под совместным действием осевого усилия, крутящего и изгибающих моментов, приложенных на торцевых сечениях (рис. 1).

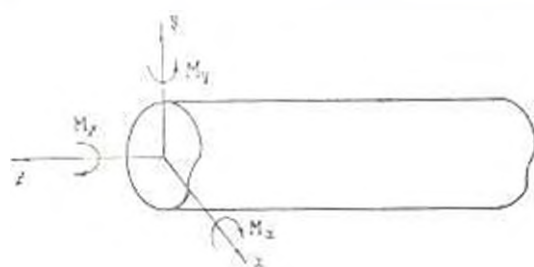


Рис. 1.

1. Интенсивности касательных напряжений и деформации сдвигов принимаем связанными соотношением $\tau_i = \frac{3}{2} f(\varepsilon_i) \varepsilon_i$, где функция f характеризует закон упрочнения материала стержня с некоторым физическим параметром λ . Полагаем, что напряжения безразмерные (в долях $2G$, где G — модуль сдвига) и случай $\lambda = 0$ соответствует идеально упругому материалу $f|_{\lambda=0} = 1$. Принимаем, что между компонентами напряжений, деформации и перемещений имеют место зависимости:

$$\tau_{xy} = \tau = f(\varepsilon_i) \varepsilon_{xy}, \quad \tau_{xz} = f(\varepsilon_i) \varepsilon_{xz}, \quad \dots \quad (1)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \dots, \quad 2\varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \dots \quad (2)$$

Полуобратным способом [7, 8], принимая, что тензор деформации не зависит от продольной координаты z , а σ_x , σ_y и τ_{xz} равны нулю по всему объему стержня, приходим для перемещений к выражениям:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{A}{4}(x^2 - y^2 + 2z^2) - \frac{B}{2}xy - Dyz - \frac{C}{2}x; \\ v &= -\frac{B}{4}(y^2 - x^2 + 2z^2) - \frac{A}{2}xy - Dyz - \frac{C}{2}y; \\ w &= D\psi(x, y) + Axz + Byz + Cz, \end{aligned} \quad (3)$$

где A , B , C , D — постоянные, а $\psi(x, y)$ — неизвестная функция перемещения. Для компонентов напряжений имеем:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \frac{3}{2}f(\varepsilon_i)(Ax + By + C); \quad \tau_x = \tau_y = \tau_{xy} = 0; \\ \tau_{xz} &= Df(\varepsilon_i)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right); \quad \tau_{yz} = Df(\varepsilon_i)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right); \\ \varepsilon_i &= \sqrt{\frac{3}{4}(Ax + By + C)^2 + D^2\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)^2\right]}. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя (4) в дифференциальные уравнения равновесия, приходим к уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(\varepsilon_i)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[f(\varepsilon_i)\left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)\right] = 0. \quad (5)$$

Условием отсутствия нагрузки на боковой поверхности стержня будет:

$$\frac{\partial\psi}{\partial s}\bigg|_{\Gamma} = \frac{d}{ds}\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right), \quad (6)$$

где Γ — контур области с поперечным сечением Ω ; s — дуга контура; ν — направление внешней нормали контура. Таким образом, определение напряженного состояния стержня сводится к внутренней задаче Неймана для уравнения (5) при краевом условии (6).

2° Вводя обозначения: $\varepsilon_i = D\sqrt{\omega}$; $f(\varepsilon_i) = f_1(\omega)$;

$$\omega = (\alpha x + \beta y + \gamma)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)^2 \quad (7)$$

(где α , β , γ соответственно равны A , B , C , умноженные на $\sqrt{3/2D}$), уравнение (5) представим в виде

$$\nabla^2\psi + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - y\right)\frac{\partial \ln f_1}{\partial x} + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} + x\right)\frac{\partial \ln f_1}{\partial y} = 0, \quad (8)$$

Решение уравнения (8) ищем в виде степенного ряда по параметру λ

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_k, \quad (9)$$

Далее, функции ω и $\ln f_1$ разлагаем в степенные ряды по λ :

$$\omega = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \omega_k; \quad \ln f_1 = -\lambda \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k F_k, \quad (10)$$

где

$$\omega_0 = (x_0 x + y_0 y + z_0)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} - y \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + x \right)^2;$$

$$\omega_n = \sum_{k=0}^n [(x_k x + y_k y + z_k)(x_{n-k} x + y_{n-k} y + z_{n-k}) + \text{grad} \varphi_k \text{grad} \varphi_{n-k}]; \quad (11)$$

$$F_n = -\frac{1}{(n+1)!} \left. \frac{d^{n+1} \ln f_1}{d\lambda^{n+1}} \right|_{\lambda=0} = F_n(\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_n);$$

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{A_0}{D_0}; \quad y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{B_0}{D_0}; \quad z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{C_0}{D_0}. \quad (12)$$

Здесь x_k, y_k, z_k, D_k коэффициенты разложения соответствующих параметров в ряд по λ , а A_0, B_0, C_0, D_0 являются постоянными соответствующей линейно-упругой задачи.

Подставляя (9) и (10) в (8), приходим к краевой задаче:

$$\nabla^2 \varphi_0 = 0; \quad \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = \frac{d}{ds} \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right), \quad (13)$$

дающее решение линейно-упругой задачи и систему рекуррентных задач Неймана:

$$\nabla^2 \varphi_{n+1} = Q_n; \quad \left. \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial \nu} \right|_{\Gamma} = 0; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$Q_n = \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - y \right) \frac{\partial F_n}{\partial x} - \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial y} + x \right) \frac{\partial F_n}{\partial y} + \sum_{k=1}^n \text{grad} \varphi_k \text{grad} F_{n-k}, \quad (14)$$

определяющее пластическое состояние стержня.

В случае прямоугольного поперечного сечения имеем граничные условия

$$\left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right|_{y=\pm \frac{a}{2}} = -y, \quad \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right|_{x=\pm \frac{b}{2}} = x, \quad \left. \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial x} \right|_{x=\pm \frac{b}{2}} = \left. \frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial y} \right|_{y=\pm \frac{a}{2}} = 0. \quad (15)$$

Значение φ_0 , определяющее деформацию поперечного сечения при упругом кручении, известно:

$$\psi(x, y) = -xy + \frac{8b^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \frac{\operatorname{sh} \frac{(2k-1)\pi x}{b}}{\operatorname{ch} \frac{(2k-1)\pi a}{b}} \cdot \sin \frac{(2k-1)\pi y}{b}, \quad (16)$$

3° Для определения ψ_{n+1} нужно показать выполнение необходимого условия разрешимости (14), т. е.

$$\iint Q_n d\Omega = 0. \quad (17)$$

Подставляя Q_n из (14) в (17), после некоторых преобразований и использования граничных условий (15) получим:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} Q_n dx dy = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sum_{k=1}^{\infty} F_{n-k} \nabla^2 \varphi_k dx dy. \quad (18)$$

Далее, почленно интегрируя уравнение (8) в рассматриваемой прямоугольной области и используя граничные условия (15), находим:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \nabla^2 \varphi \ln f_1 dx dy = 0. \quad (19)$$

Подставляя здесь разложения φ и $\ln f_1$, будем иметь:

$$\int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \sum_{k=1}^{\infty} F_{n-k} \nabla^2 \varphi_k dx dy = 0. \quad (20)$$

Сопоставляя (20) с (18), приходим к условию (17).

4° Решение краевой задачи (14) представится в виде

$$\psi_{n+1}(x, y) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} Q_n(\xi, \eta) G(\xi, \eta, x, y) d\xi d\eta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

$$G(\xi, \eta, x, y) = \begin{cases} \frac{x-\xi}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi m}{b} \left(\xi + \frac{a}{2} \right) \operatorname{ch} \frac{2\pi m}{b} \left(x - \frac{a}{2} \right) \cos \frac{2\pi m}{b} (y-\eta)}{\pi m \operatorname{sh} \frac{2\pi m}{b} a}, & \xi \leq x \\ \frac{x-\xi}{2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ch} \frac{2\pi m}{b} \left(\xi - \frac{a}{2} \right) \operatorname{ch} \frac{2\pi m}{b} \left(x + \frac{a}{2} \right) \cos \frac{2\pi m}{b} (y-\eta)}{\pi m \operatorname{sh} \frac{2\pi m}{b} a}, & \xi \geq x \end{cases} \quad (22)$$

Здесь G —функция Грина второго рода для данной задачи.

Решение задачи (14) можно получить также в форме двойных тригонометрических рядов Фурье:

$$\psi_{n+1}(x, y) = - \sum_{m=1, k=1}^{\infty} \frac{q_{mk}^{(n)}}{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{k^2}{b^2} \right)} \cos \frac{m\pi \left(x + \frac{a}{2} \right)}{a} \cos \frac{k\pi \left(y + \frac{b}{2} \right)}{b}, \quad (23)$$

$$(n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\text{где } q_{mk}^{(n)} = \frac{4}{ab} \int_{a/2-b/2}^{a/2+b/2} \int_{a/2-b/2}^{a/2+b/2} Q_n(x, y) \cos \frac{m\pi \left(x + \frac{a}{2} \right)}{a} \cos \frac{k\pi \left(y + \frac{b}{2} \right)}{b} dx dy, \quad (24)$$

При степенном законе упрочнения ($f(\epsilon_i) = \epsilon_i^{-2}$) для выражения Q_n имеем:

$$Q_n(x, y) = \frac{1}{\omega_0} \left[\left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \omega_n}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \omega_n}{\partial y} \right] + \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=1}^n \text{grad } \psi_k \text{ grad } \omega_{n-k} - \\ - \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=1}^n Q_{n-k} \omega_k, \quad (25)$$

Пользуясь априорными оценками Шаудера, аналогично [8] легко показать абсолютную и равномерную сходимость ряда (9).

5. Компоненты напряжения, соответствующие второму приближению, будут:

$$\tau_{xz} = (D_0 + iD_1) \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - y \right) + iD_0 \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - y \right) \ln \mu \right]; \\ \tau_{yz} = (D_0 + iD_1) \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} + x \right) + iD_0 \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial y} - \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} + x \right) \ln \mu \right]; \quad (26) \\ z_z = \frac{3}{2} \left[(A_0 + iA_1)x + (B_0 + iB_1)y + C_0 + iC_1 - (A_0x + B_0y + C_0) \ln \mu \right],$$

где $\mu(x, y) = D_0^2 \omega_0$; $\psi_0(x, y)$ определяется по (16), а $\psi_1(x, y)$ — согласно (23), причем

$$Q_0(x, y) = \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} - y \right) \frac{\partial \ln \omega_0}{\partial x} + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} + x \right) \frac{\partial \ln \omega_0}{\partial y}. \quad (27)$$

Постоянные $A_0, B_0, C_0, D_0, A_1, B_1, C_1, D_1$ определяются из статических условий, которые, при отсутствии осевых сил, имеют вид:

$$\iint_{\Omega} y z_z d\Omega = \frac{M_x}{2G}; \quad \iint_{\Omega} x z_z d\Omega = \frac{M_y}{2G}; \\ \iint_{\Omega} z_z d\Omega = 0; \quad \iint_{\Omega} (x \tau_{yz} - y \tau_{xz}) d\Omega = \frac{M_z}{2G}. \quad (28)$$

Подставляя выражения (26) в (27), будем иметь:

$$A_0 = \frac{4M_y}{\pi a^2 b}; \quad B_0 = \frac{4M_x}{\pi a b^2}; \quad C_0 = 0; \quad D_0 = \frac{M_z}{20K_1 a b^2}$$

$$A_1 = A_0 \frac{12}{a^2 b} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} x^2 \ln r \, dx \, dy + B_0 \frac{12}{a^2 b} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} xy \ln r \, dx \, dy;$$

(29)

$$B_1 = A_0 \frac{12}{a b^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} xy \ln r \, dx \, dy + B_0 \frac{12}{a b^2} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y^2 \ln r \, dx \, dy;$$

$$C_1 = \frac{A_0}{a b} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} x \ln r \, dx \, dy + \frac{B_0}{a b} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} y \ln r \, dx \, dy;$$

$$D_1 = \frac{D_0}{a b^2 K_1} \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ y \left| \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \left(\frac{\sigma_x}{a x} - \gamma \right) \right| - x \left| \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \left(\frac{\sigma_y}{a y} - x \right) \right| \right\} dx \, dy,$$

где

$$K_1 = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^2} \frac{b}{a} \sum_{k=1,3,5}^{\infty} \frac{1}{k^3} \operatorname{th} \frac{2\pi k a}{b} \right).$$

Для численного примера, полагая: $M_x = 0$; $M_y = 16 M_z$; $a/b = 2$; $\gamma = 0,2$; $G = 0,77 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2$; $M_z/b^3 = 35 \text{ кг/см}^2$, — из (29) нахо-

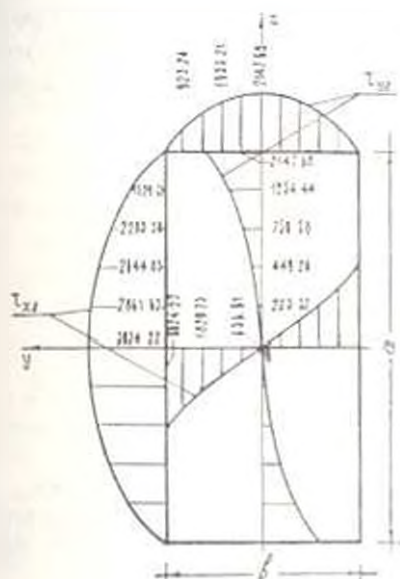


Рис. 2



Рис. 3

дйм: $B_0 = C_0 = B_1 = C_1 = 0$;

$$D_0 = 5 \cdot 10^{-4} \frac{1}{b} [\text{см}^{-1}]; \quad A_0 = 36,6 \cdot 10^{-4} \frac{1}{b} [\text{см}^{-1}];$$

$$D_1 = 16,8 \cdot 10^{-4} \frac{1}{b} [\text{см}^{-1}]; \quad A_1 = -44,3 \cdot 10^{-4} \frac{1}{b} [\text{см}^{-1}].$$

Картина напряженного состояния, соответствующая приведенным числовым данным, представлена на рисунках 2 и 3 (в кг/см^2).

Ереванский политехнический институт им. К. Маркса
Институт механики АН АрмССР

Поступило 29.VII. 1975.

Մ. Բ. ԺՐԵՆՅԱՆ, Ա. Ա. ԼԵԱՆՅԱՆ

ՈՒՂԱԿԱՆՈՒՆ ԶՈՏՈՒՄԵՐ ՊՐԵԶՄԱՏԻԿ ԶՈՂԻ ՊԼԱՍՏԻԿԱՆԵԱՆ ՎԻՃԱԿԻ ՇՈՒՄՏԵՂ ՈՒՐՄԱՆ ԵՎ ՅԵՐՄԱՆ ԴԵՊՐՈՒՄ

Ո Ւ Վ Ո Ր Ո Ւ Մ

Ուսումնասիրվում է պրեզմատիկ ձողի լարվածա-գեֆորմացիոն վիճակը համառոտ պորման և ծոման դեպքում ամրապնդում ունեցող առնչվողի նյութի համար: Տեղափոխումները ֆունկցիայի օգտագործմամբ խնդիրը հանդիմանում է մեկ ոչ-զծային էլիպսիկ դեֆորմացիայի հավասարման ինտեգրման: Աստիճանային շարքերի օգնությամբ այն բերվում է նեյմանի եզրային խնդիրների սեկտրենտ սխեմների, որոնցից առաջինը Հուսկոտի հավասարման համար, իսկ մյուսները՝ Պուասսոնի Ապագուցված է աչյ խնդիրների լուծելիությունը և ստացվում են լուծումները ուղղանկյուն հատվածի համար: Բերված են թվային օրինակի արդյունքները առաջնային ամրապնդում ունեցող նյութի համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Hameitman G. H. „Quart. J. Appl. Math.“, 1, 1944.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. МЭ, М., 1956.
3. Pleschik S. „Arch. Mech. stosow.“, т. 13, № 1, 1961.
4. Pleschik S. Zyczkowski M. „Arch. Mech. stosow.“, т. 13, № 3, 1961.
5. Миллер Л. М., Миллер Т. Ё. Численный анализ композиционных систем и кручение сжимающейся пластической квадратной трубы. Прикладная механика. Труды Америк. общества инженерно-механиков, № 1, 1967.
6. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкции. Изд. «Наука», М., 1966.
7. Задоян М. А. Задача установившейся ползучести призматического стержня при совместном растяжении, изгибе и кручении. Известия АН АрмССР, серия Механика, т. 21, № 3, 1968.
8. Задоян М. А. Пластическое состояние толстостенной цилиндрической трубы при совместном кручении и изгибе. ДАН АрмССР, т. 56, № 4, 1973.