

ГИДРАВЛИКА

А. Г. НАЗАРЯН

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ В НАПОРНОМ ТРУБОПРОВОДЕ С
 ПРИСОЕДИНЯЕМЫМ ПО ПУТИ РАСХОДОМ

Решение многих инженерных задач практики гидротехнического и мелиоративного строительства связано с применением теории движения жидкости с переменным по пути расходом. Такое явление имеет место при течениях в трубах водопроводных и оросительных сетей, в фильтрах опесоченных сооружений, буровых скважин, и дренажных трубах, трубах подпочвенного орошения и др. Тем не менее теория движения жидкости с переменным по пути расходом еще не вполне разработана.

В ряде существующих решений большей частью рассматривается случай, когда присоединяемые расходы принимаются постоянными или линейной функцией длины, что значительно суживает класс решаемых задач [1—3]. В других же работах не все факторы учтены [4, 5] или же решения не доведены до практического применения [6, 7].

Вследствие нелинейности уравнений, описывающих данное явление, их общее решение пока отсутствует.

В настоящей работе поставлена цель: дать общее решение применительно к одному из практических случаев—движению жидкости в перфорированной трубе, расположенной под уровнем воды. Решение такой задачи представляет значительный интерес, так как по такой схеме можно решать многие задачи водоснабжения, мелиорации и др.

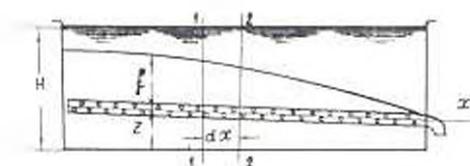


Рис. 1. Схема расположения перфорированной трубы

Рассмотрим установившееся движение реальной жидкости в перфорированной трубе круглого поперечного сечения, находящейся под уровнем (рис. 1). Путем применения теоремы импульсов и закона сохранения массы к выделенному объему жидкости [8] получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} Q \frac{dQ}{dx} + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho_0 d^2 D \rho g^3}{4 m g \Omega^2} = \frac{\rho Q^2}{2 D g \Omega^2} = l_0; \quad (1)$$

$$\frac{dQ}{dx} = q,$$

где α_0 — коэффициент количества движения; Q — переменный по пути расход жидкости; P — переменное по длине трубы давление; q — переменный по пути расход жидкости, поступающей через боковые отверстия трубы на единицу ее длины; $\Omega = \pi D^2/4$ — площадь поперечного сечения трубы; m — степень перфорации (скважность) трубы; β — угол между направлением течения жидкости, поступающей через отверстия трубы, и ее продольной осью; l_0 — геометрический уклон трубы.

Потери на трение учтены по формуле Дарси — Вейсбаха:

$$l_f = \frac{l}{2D} \frac{Q^2}{g\Omega^2}$$

Приведенная система (1) не замкнута (два уравнения с тремя неизвестными: Q , P и q). Для замыкания системы принимается выражение, характеризующее явление поступления жидкости через отверстия в трубе, в виде

$$q = \mu D m \sin \beta \sqrt{2g(H - h)}, \quad (2)$$

где μ — коэффициент расхода отверстий перфорации; H — общий напор; $h = z + \frac{P}{\gamma}$ — пьезометрический напор.

Исключая из (1) и (2) давление P и путевой расход q , для определения величины переменного по пути расхода Q в перфорированной трубе получим следующее общее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dQ}{dx} \frac{d^2Q}{dx^2} - \frac{1}{m} \frac{dm}{dx} \left(\frac{dQ}{dx} \right)^2 - \alpha \left[2\alpha_0 Q \frac{dQ}{dx} + \frac{Q^2}{2D} - \frac{2g l_0 \sin \beta}{4m} \left(\frac{dQ}{dx} \right)^2 \right] = 0, \quad (3)$$

где

$$\alpha = \frac{4 \cdot m \sin \beta}{D}$$

Граничными условиями для данной задачи могут служить следующие:

$$x = 0 \quad Q = 0; \quad x = L \quad \frac{dQ}{dx} = q_0$$

где L — длина трубы; q_0 — значение путевого расхода в конечном сечении трубы.

Уравнение (3) представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка, общее аналитическое решение которого связано с почти непреодолимыми математическими трудностями. Однако, введя ограничения о равномерной перфорации ($m =$

= const) удается решить уравнение (3) в параметрическом виде. При этом допустимое уравнение (3) пишется так:

$$\frac{dQ}{dx} \frac{d^2Q}{dx^2} - \alpha^2 \left[2z_0 Q \frac{dQ}{dx} + \frac{1}{2D} Q^2 - \frac{z_0 D \operatorname{ctg} \beta}{4m} \left(\frac{dQ}{dx} \right)^2 \right] = 0, \quad (5)$$

Произведем в (5) замену переменных согласно выражению

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{Q}{F(x)}, \quad (6)$$

тогда

$$-\frac{dF}{dx} = \frac{\alpha^2}{2D} F^2 + 2z_0 \beta^2 F^2 - 1.$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{\frac{\alpha^2}{2D} F^2 + 2z_0 \beta^2 F^2 - \frac{z_0 D \operatorname{ctg} \beta}{4m} F - 1}{dF} = -dx. \quad (7)$$

Путем несложных преобразований приведем (7) к удобной интегрируемому виду. Если F_0 — вещественный корень уравнения

$$\frac{\alpha^2}{2D} F_0^2 + 2z_0 \beta^2 F_0^2 - \frac{z_0 D \operatorname{ctg} \beta}{4m} F_0 - 1 = 0,$$

то можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\alpha^2}{2D} F^2 + 2z_0 \beta^2 F^2 - \frac{z_0 D \operatorname{ctg} \beta}{4m} F - 1 &= \\ &= (F - F_0) (aF^2 + bF - c), \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$a = \frac{\alpha^2}{2D}; \quad b = \left(\frac{\alpha^2}{2D} - 2z_0 \beta^2 \right) F_0;$$

$$c = bF_0 - \frac{z_0 D \operatorname{ctg} \beta}{4m} F_0.$$

С учетом (8) левую часть (7) можно представить в виде простых дробей:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{\alpha^2}{2D} F^2 + 2z_0 \beta^2 F^2 - \frac{z_0 D \operatorname{ctg} \beta}{4m} F - 1} &= \frac{K_1}{F - F_0} + \\ &+ \frac{K_2 + FK_3}{aF^2 + bF - c}. \end{aligned} \quad (9)$$

Значения постоянных K_1 , K_2 и K_3 определяются путем приравнивания друг к другу коэффициентов при одинаковых степенях функции в обеих

частях уравнения (9).

Тогда:

$$K_1 = \frac{1}{B_0}; K_2 = -\frac{aF_0 + b}{B_0}; K_3 = -\frac{a}{B_0},$$

где

$$B_0 = aF_0^2 + bF_0 + c.$$

Следовательно, дифференциальное уравнение (7) можно представить в следующем виде:

$$\frac{dF}{F - F_0} - \frac{(aF_0 + b)dF}{aF^2 + bF + c} - \frac{aF^2 dF}{aF^2 + bF + c} = -B_0 dx. \quad (10)$$

После интегрирования (10) получим:

$$\ln \frac{|F - F_0|}{\sqrt{aF^2 + bF + c}} - \frac{2aF_0 + b}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2aF + b}{\sqrt{\Delta}} = -B_0 x + z_1, \quad (11)$$

где

$\Delta = 4ac - b^2$; z_1 — постоянная интегрирования, определяемая из граничных условий (4):

$$z_1 = \ln \frac{|-F_0|}{\sqrt{c}} - \frac{2aF_0 + b}{\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{\Delta}}. \quad (12)$$

Подставляя значение z_1 в (11), получим:

$$\begin{aligned} -B_0 x = \ln \frac{|F - F_0| \sqrt{c}}{|-F_0| \sqrt{aF^2 + bF + c}} - \\ - \frac{2aF_0 + b}{\sqrt{\Delta}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2aF + b}{\sqrt{\Delta}} - \operatorname{arctg} \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Для определения искомой функции $Q = f(x)$ в уравнении (13) следует перейти к прежним переменным при помощи соотношения (6). В результате такой замены для определения $Q(x)$ получается сложное трансцендентное дифференциальное уравнение, аналитическое решение которого не представляется возможным.

Для получения решения $Q(x)$ дополнительно предлагается следующий способ.

Рассмотрим выражение (6) как дифференциальное уравнение относительно $Q(x)$. Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{dx}{f(x)}. \quad (14)$$

Значение правой части этого выражения находим согласно (10), делим обе его части на $f(x)$.

Тогда взамен (14) получим:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{B_0} \left| \frac{dF}{F(F-F_0)} - \frac{(b+aF_0)}{F(aF^2+bF+c)} - \frac{dF}{aF^2+bF+c} \right|$$

Интегрирование этого уравнения уже не представляет трудности.

$$\ln Q = -\frac{1}{B_0} \left| \frac{1}{F_0} \ln \frac{|F-F_0|}{F} - \frac{b+aF_0}{c} \ln \frac{F}{\sqrt{aF^2+bF+c}} - \frac{2ac-b^2-abF_0}{c\sqrt{\Delta}} \operatorname{arctg} \frac{2aF+b}{\sqrt{\Delta}} \right| + \varphi_2, \quad (15)$$

где φ_2 — постоянная интегрирования.

Определяя значение φ_2 и подставляя его в (15), после несложных преобразований получим:

$$\frac{Q}{Q_0} = \exp \left(\frac{-1}{B_0 F_0} \right) \left| \ln \frac{|F-F_0| \sqrt{aF_0^2+bF_0+c}}{|F_0-F_0| \sqrt{aF^2+bF+c}} - \frac{B_2}{c} \ln \frac{F \sqrt{aF_0^2+bF_0+c}}{F_0 \sqrt{aF^2+bF+c}} - \frac{(2ac-b^2-abF_0)}{c\sqrt{\Delta}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2aF+b}{\sqrt{\Delta}} - \operatorname{arctg} \frac{2aF_0+b}{\sqrt{\Delta}} \right) \right|, \quad (16)$$

При заданных значениях F из уравнений (13) и (16) определяются величины x и Q . Сделать это практически довольно просто, поскольку заранее известно, что величина x изменяется в пределах от нуля до l (общая длина перфорированной части трубы).

Таким образом, предлагаемый способ позволяет получить точное аналитическое решение задачи движения жидкости с переменным по пути расходом в параметрическом виде.

На численном примере выясним некоторые особенности полученного решения.

Пример расчета. Определить закономерности изменения общего расхода $Q = Q(x)$ в сборной трубе, а такженутных расходов $q = q(x)$ и давлений $P = P(x)$ по длине трубы уложенной под уровнем жидкости на глубину $H = 2$ м, при следующих данных: диаметр трубы $D = 80$ мм, диаметр боковых отверстий $d = 5$ мм, длина трубы $l = 30$ м, число отверстий на 1 м трубы $n = 4$ шт., геометрический уклон трубы $i_g = 0,01$, изометрический напор в конце трубы $\frac{P}{\gamma} = 0,5$ м. Известны также значения коэффициентов: $\lambda_0 = 1,05$; $l = 0,025$; $\mu = 0,65$.

Определяя значения постоянных, для подбора параметра получаем следующее выражение:

$$x = -12,63 \left| \ln \frac{0,5(F-33,7)}{\sqrt{0,19F^2+0,86F-290}} \right|$$

$$-1.77 \left(\operatorname{arctg} \frac{0.37F + 8.61}{12} - 0.62 \right)$$

Зная значения F определяем соответствующие величины x , и затем по уравнениям (16), (6) и (2) находим значения общих и боковых расходов и давлений. Результаты расчетов приведены на графике рис. 2.

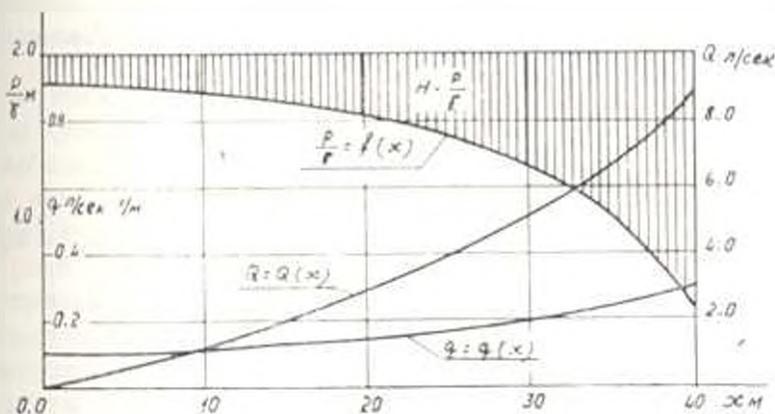


Рис. 2. Кривые изменения общих и боковых расходов и давлений по длине трубы

Из графика рис. 2 видно, что как общий расход в трубе, так и принимаемый боковой расход по длине трубы нарастает, а давление в ней, наоборот, уменьшается. Заштрихованные ординаты представляют собой разность давлений, под действием которой происходит приток воды в перфорированную трубу. Зависимость $Q = Q(x)$ на графике представляется монотонно возрастающей кривой и оставляет кажущееся впечатление: как будто при непрерывном увеличении координаты x расход в трубе непрерывно может увеличиваться. Однако, это противоречит физической сущности явления, поскольку труба имеет ограниченную пропускную способность.

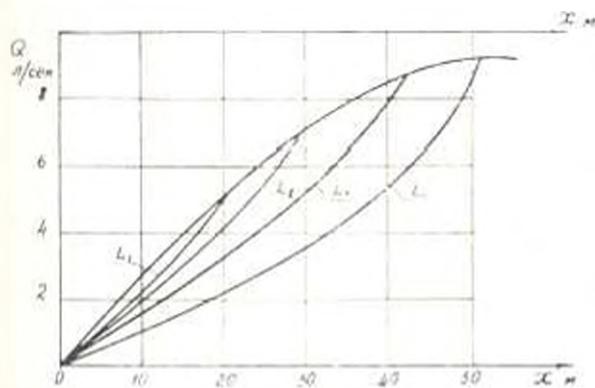


Рис. 3. Зависимость «общего» расхода от длины трубы

Рассмотрение зависимости пропускной способности труб различных длин показывает, что предельная пропускная способность труб с увеличением длины последних стремится к конечному значению, что хорошо согласуется с экспериментальными данными (рис. 3).

Очевидно, что полученное решение и численный пример являются ограниченными в смысле возможности исследования задачи в большом интервале изменения начальных условий и продольной координаты вдоль трубы. Такая возможность представляется при качественном анализе дифференциального уравнения [9]

$$\frac{dR}{dQ} = \frac{A Q^2 - b Q R - C R^2}{R^2} = \frac{\varphi(Q, R)}{\psi(Q, R)} \quad (16)$$

полученного из исходного уравнения (3) путем подстановки $\frac{dQ}{dx} = q(x) = R(Q)$. На графике рис. 4 приведены семейства интегральных кривых уравнения (18), расположенных в первом квадранте плоскости R, Q . Как видно из этого графика, интегральные кривые разграничены прямой $R = KQ$, являющейся частным решением уравнения (18).

В зависимости от того, при каких начальных условиях R_0, Q_0 начинается процесс движения жидкости в перфорированной трубе, полу-

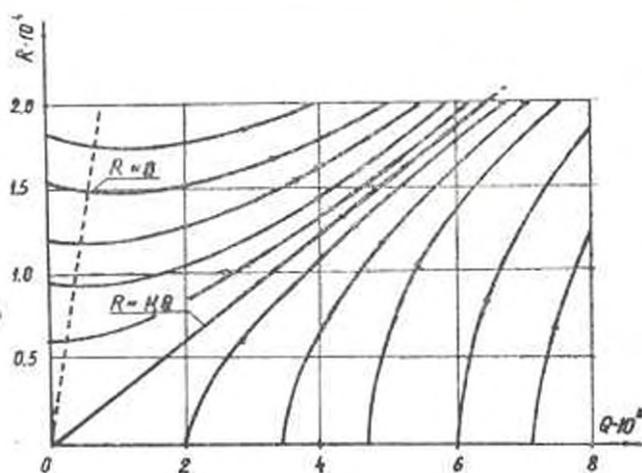


Рис. 4. Поведение интегральных кривых в плоскости R, Q

чают соответствующие законы распределения расхода вдоль трубы. В частности, если начальные условия находятся на прямой $R = KQ$, то распределение $Q(x)$ в трубе происходит по экспоненциальному закону. Действительно, из уравнения $R = KQ$ имеем $\frac{dQ}{Q} = K dx$, т. е. $Q = C e^{Kx}$. Очевидно, что для отдельных семейств интегральных кривых получаются различные закономерности $Q = Q(x)$.

Из рисунка также видно, что интегральные кривые, исходящие из оси OR , в начале несколько убывают, затем, после пересечения с прямой $R^* = 0$, начинают монотонно расти, приближаясь к прямой $R = KQ$, а кривые, исходящие из оси OQ , монотонно приближаются к прямой $R = KQ$.

Величина путевого присоединяемого расхода q соответствующим образом следует упомянутым закономерностям, а давление в трубе $\frac{P}{\rho}$, наоборот, изменяется согласно (2). Если рассмотреть случаи $\beta = \pm 2$, то прямая $R^* = 0$ совпадает с осью OR , и, следовательно, первоначальное убывание интегральных линий у оси OR в этом случае не наблюдается.

Как нетрудно заметить из графика, функции $R = f(Q)$ в основном нарастающие и, поэтому, у всех семейств интегральных кривых $q_0 > q_1$ (конечное значение путевого расхода больше начального). При этом, если q_0 , оставаясь меньшим q_1 , одновременно мало отличается от него, то суммарный расход в конце трубы будет меньшим по сравнению с случаем, когда q_0 значительно отличается от q_1 , будучи всегда меньшим от него. Это, на первый взгляд, парадоксальное утверждение выяснится, если учесть, что меньшим значениям R (или же q) соответствуют трубы большей длины. Действительно, согласно обозначению (17) имеем:

$$\int_0^L dx = L = \int_0^{Q_0} \frac{dQ}{R(Q)}$$

Подынтегральное выражение правой части показывает, что с уменьшением $R(Q)$ длина трубы L увеличивается, и, поэтому, переход с вышерасположенной кривой к нижней соответствует увеличению длины трубы.

Следовательно, наибольшая длина трубы соответствует кривой, проходящей через начало координат, где значение расхода стремится к конечной величине. Поэтому, с увеличением длины трубы расход в ней стремится к конечной величине, что соответствует физической сущности задачи. Этот факт подтверждается и выше при решении частного примера.

АрмНИИВПыГ

Поступило 28 II 1975.

Ս. Վ. ՆԱԳՈՐՅԱՆ

ՀԱՆՐԱՊԵՏԻ ԵՐԿԱՐԳԻՐՅԱՄԵ ՄԵՆԱՑՈՂ ԵՎՔՈՎ
ՇԵՂՈՒԻ ԾԱՐԳՈՒՄԸ ՀԵՇՈՒՄԱՅԻՆ ԵՌՂՈՎԱԿԱՇԱՐՈՒՄ

Ա թ փ ո փ ո լ ժ

Հոդվածում դիտվում է իրական հեղուկի մեջ խորատուրբային ծախսերի և ցանցերի խողովակում հեղուկի հաստատված շարժումը: Ստացված

ված է այդ շարժման ընդհանուր գիֆերենցիայի հավասարումը և որոշված են խնդրի լուծման սահմանային պայմանները: Խողովակի մեջ նրա երկարավիճակի փոփոխական էլքով հեղուկի շարժումը արտահայտվում է երկրորդ կարգի սչ-դժային գիֆերենցիայի հավասարումով, սրի ընդհանուր լուծումը ստորահան ճանապարհով (կոմպրատորայով) չի ստացվում:

Գիտելով հավասարաչափ բաշխված համասեռ ճակտերներով խողովակի հնարախոր է գտնելով ստանալ հավասարման մի լուծում՝ պարամետրական տեսքով: Արդյունքում ստացվել են ռատիոնալիզաց խողովակում ընդհանուր և կողային էլքերի, խնչդես նաև անշտմների փոփոխման օրինաչափությունները ճանապարհի երկարավիճակը: Լուծումը հասցված է գործնական կիրառման աստիճանի, զճայում է թվային օրինակ: Տրված է գիֆերենցիայի հավասարման արակապան վերլուծությունը և րապահայտված են խնդրի որոշ ասանձնաչափությունները:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Петров Г. А. Движение жидкости с переменным расходом вдоль пути. М.—Л., 1964.
2. Пенько Я. Т. О движении жидкости с переменной вдоль потока массой. Труды Харьковского гидромет. института, 1937.
3. Факторичия М. Периодическое движение жидкости с линейным законом изменения присоединяемости расхода. Изв. ВНИИ, № 5, 1953.
4. Коновалов И. М. Движение жидкости с переменным расходом. Труды ДИИВТ, вып. 8, 1937.
5. Егорова А. И. Сбор воды дырчатыми трубами с постоянным шагом отверстий «Водоснабжение и санитарная техника» № 6, 1972.
6. Nascetti G. Erogazi a costante di portata da una condotta in pressione forata «Energia Elettrica», n. 8, 1958.
7. Василекко А. А., Смыслов В. В. Анализ уравнения движения жидкости в горизонтальном или вертикальном трубопроводе с присоединением расхода вдоль пути. «Гидротехника и гидро техника», вып. 17, Изд. «Техника», Киев, 1973.
8. Ուսարյան Ա. Դ. Դասակարգում ընդհանուր շարժման ընդհանուր լուծումը: Երևան, 1974.
9. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., 1953.