ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXVIII, №3, 1975 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Н. К. СНИТКО

ПРЕДЕЛЬНЫЕ НАПРЯЖЕННЫЕ СОСТОЯНИЯ ПРИ РАЗВИТИИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

В развитие [1, 2] рассмотрим общий случай объемного напряженного состояния, когда $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. Для деформаций в каждом напряженном состоянии рассматриваем упруго-пластическую зону; получим следующие выражения для удлинений в упруго-пластическом состоянии в каждом отдельном состоянии действия σ_1, σ_2 и σ_3 (рис. 1):

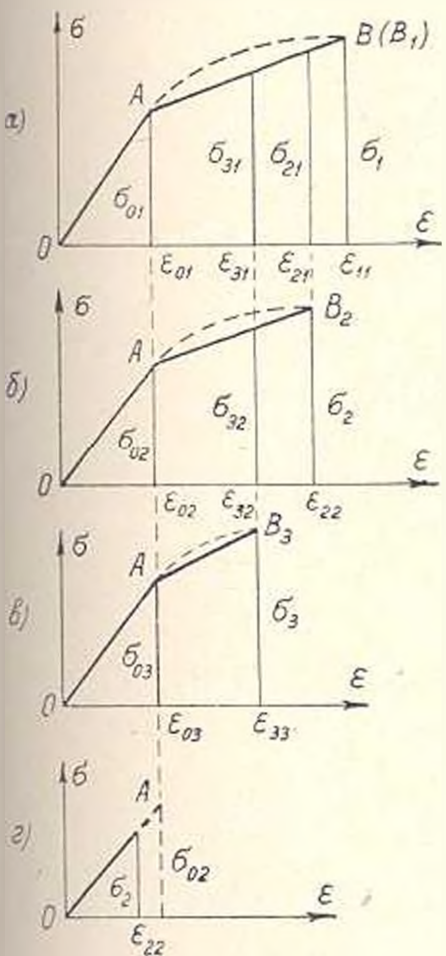

Рис. 1

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{01}}{E} + \frac{\sigma_1 - \sigma_{01}}{E_{1k}};$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{02}}{E} + \frac{\sigma_2 - \sigma_{02}}{E_{2k}}; \qquad (1)$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{03}}{E} + \frac{\sigma_3 - \sigma_{03}}{E_{3k}},$$

где E_{1k}, E_{2k}, E_{3k} — „хордовые" модули, которые определяются в соответствии с параболической кривой $\sigma - \varepsilon$; σ_{01}, σ_{02}, σ_{03} — пределы упругости (полагаем их постоянными). Деформации по (1) рассматриваем в каждом данном напряженном состоянии (рис. 1, *а*, *б* и *в*).

В упругой области (до σ_{01}, σ_{02}, σ_{03}) вводятся коэффициенты E и μ, в упруго-пластической — E_{ik} и $\mu_{пл}$. Если $\sigma_2 > \sigma_{02}$, $\sigma_3 > \sigma_{03}$, то поперечные деформации, на которых совершают работу напряжения σ_i, будут в упруго-пластической области. Так как $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, то работа напряжений σ_1 будет содержать 6 членов, напряжений σ_2 — 7 членов и напряжений σ_3 — 8 членов. Добавочные члены (пятый член) объясняются тем, что σ_2 совершает еще работу на $\mu_{пл}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{21})$, а σ_3 — на

$\mu_{пл}(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}-\varepsilon_{31}-\varepsilon_{32})$. После преобразований получим $A_{пол}$, а вычитая $A_{об}=\frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2$, найдем удельную энергию изменения формы:

$$A_{ф}^{пб}=\frac{1}{2E}(\sigma_{01}^2+\sigma_{02}^2+\sigma_{03}^2)+\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma_1^2-\sigma_{01}^2}{E_{1k}}+\frac{\sigma_2^2-\sigma_{02}^2}{E_{2k}}+\frac{\sigma_3^2-\sigma_{03}^2}{E_{3k}}\right)-$$

$$-\frac{\mu}{E}(\sigma_{01}\sigma_{02}+\sigma_{01}\sigma_{03}+\sigma_{02}\sigma_{03})-\frac{\mu_{пл}}{2}\Big[(\sigma_{01}+\sigma_{21})\frac{\sigma_2-\sigma_{02}}{E_{2k}}+(\sigma_{01}+\sigma_{31})\frac{\sigma_3-\sigma_{03}}{E_{3k}}+$$

$$+(\sigma_2+\sigma_{02})\frac{\sigma_{21}-\sigma_{01}}{E_{1k}}+(\sigma_3+\sigma_{03})\frac{\sigma_{32}-\sigma_{02}}{E_{2k}}+(\sigma_3+\sigma_{03})\frac{\sigma_{31}-\sigma_{01}}{E_{1k}}+(\sigma_{32}+\sigma_{02})\frac{\sigma_3-\sigma_{03}}{E_{3k}}\Big]-$$

$$-\mu\left[\sigma_2\frac{\sigma_1-\sigma_{21}}{E_{1k}}+\sigma_3\left(\frac{\sigma_1-\sigma_{31}}{E_{1k}}+\frac{\sigma_2-\sigma_{32}}{E_{2k}}\right)\right]-\frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2, \qquad (2)$$

где E_{1k}, E_{2k}, E_{3k} — упруго-пластические модули (рис. 1, *а*, *б* и *в*).

Если σ_1 — в упруго-пластической области, а σ_2 и σ_3 — в чисто упругой области (смешанное объемное состояние), то вместо (2) получаем упрощенное выражение:

$$A_{ф.см}^{пп}=\frac{1}{2E}(\sigma_{01}^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)+\frac{\sigma_1^2-\sigma_{01}^2}{2E_{1k}}-\frac{\mu}{E}(\sigma_2\sigma_{21}+\sigma_3\sigma_{31}+\sigma_3\sigma_{32})-$$

$$-\frac{\mu}{E}[(\sigma_{01}-\sigma_{21})\sigma_2+(\sigma_2-\sigma_{32})\sigma_3+(\sigma_{01}-\sigma_{31})\sigma_3]-\frac{\mu_{пл}}{E_{1k}}(\sigma_1-\sigma_{01})(\sigma_2+\sigma_3)-$$

$$-\frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)^2. \qquad (2')$$

Выражения (2) или (2') сравниваем, как обычно, с энергией изменения формы при осевом растяжении (рис. 2). Эта энергия является эталоном предельного состояния.

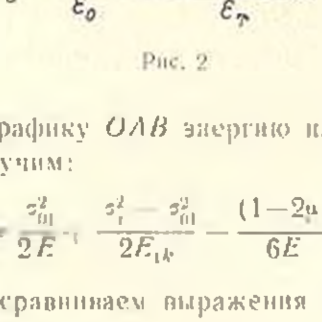

Рис. 2

Определяя по графику OAB энергию изменения формы при осевом растяжении, получим:

$$A_{ф.ос}=\frac{\sigma_{01}^2}{2E}+\frac{\sigma_т^2-\sigma_{01}^2}{2E_{1k}}-\frac{(1-2\mu)}{6E}\sigma_т^2. \qquad (3)$$

С этим значением и сравниваем выражения (2) или (2').

Для составления условия предельного состояния по теории Сен-Венана сопоставляем значение наибольшей главной деформации $\varepsilon_1^{об}$ в объемном напряженном состоянии с ε_1 [2]. Для $\varepsilon_1^{об}$ имеем такое выражение:

$$\varepsilon_1^{об} = \frac{\sigma_1}{E_{1k}} - \sigma_{01}\left(\frac{1}{E_{1k}} - \frac{1}{E}\right) - \mu\frac{(\sigma_{02} + \sigma_{03})}{E} - \mu_{пл}\left(\frac{\sigma_2 - \sigma_{02}}{E_{2k}} + \frac{\sigma_3 - \sigma_{03}}{E_{3k}}\right), \quad (4)$$

причем считаем, что $\sigma_1 > \sigma_{01}$, $\sigma_2 > \sigma_{02}$, $\sigma_3 > \sigma_{03}$. Если σ_2 и σ_3 — сжимающие, то перед соответствующими значениями напряжений ставится знак минус. В случае, если σ_2 и σ_3 — в упругой области, а σ_1 — в пластической:

$$\varepsilon_{1,\,см}^{об} = \frac{\sigma_1}{E_{1k}} - \sigma_{01}\left(\frac{1}{E_{1k}} - \frac{1}{E}\right) - \frac{\mu(\sigma_2 + \sigma_3)}{E}. \quad (4')$$

В случае плоского напряженного состояния выражение (2) при $\sigma_1 > \sigma_{01}$, $\sigma_2 > \sigma_{02}$ переходит в следующее:

$$A_\phi^{пл} = \frac{1}{2E}(\sigma_{01}^2 + \sigma_{02}^2) + \frac{1}{2}\left|\frac{\sigma_1^2 - \sigma_{01}^2}{E_{1k}} + \frac{\sigma_2^2 - \sigma_{02}^2}{E_{2k}}\right| - \frac{\mu}{E}\sigma_{01}\sigma_{02} -$$

$$- \frac{\mu_{пл}}{2}\left|(\sigma_{01} + \sigma_{21})\frac{\sigma_2 - \sigma_{02}}{E_{2k}} + (\sigma_2 + \sigma_{02})\frac{\sigma_{21} - \sigma_{01}}{E_{1k}}\right| - \mu_{пл}\sigma_2\frac{\sigma_1 - \sigma_{21}}{E_{1k}} -$$

$$- \frac{1 - 2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2)^2 \ldots \quad (5)$$

Для главной деформации ε_1 имеем

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_{1k}} - \sigma_{01}\left(\frac{1}{E_{1k}} - \frac{1}{E}\right) - \frac{\mu\sigma_{02}}{E_{2k}}. \quad (а)$$

Это выражение для главной относительной деформации используем для установления предельного состояния по Сен-Венану.

Заметим, что кроме предела пропорциональности первого напряженного состояния в (2) и (5) входят пределы пропорциональности σ_{02}, σ_{03}.

Если в частном случае σ_2 — в упругой области, а σ_1 — в упруго-пластической области, то энергия изменения формы в таком смешанном упруго-пластическом состоянии будет:

$$A_{\phi\,см}^{пл} = \frac{1}{2E}(\sigma_{01}^2 + \sigma_2^2) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma_1^2 - \sigma_{01}^2}{E_{1k}} - \frac{\mu\sigma_{21}\sigma_2}{E} - \frac{\mu\sigma_2(\sigma_{01} - \sigma_{21})}{E} -$$

$$- \frac{\mu_{пл}\sigma_2}{E_{1k}}(\sigma_1 - \sigma_{01}) - \frac{1 - 2\mu}{6E}(\sigma_1 - \sigma_2)^3. \quad (6)$$

Для ε_1 имеем теперь более простое выражение:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_{1k}} - \sigma_{01}\left(\frac{1}{E_{1k}} - \frac{1}{E}\right) - \frac{\mu\sigma_2}{E}. \quad (б)$$

Представляет большой интерес выяснение зависимости изменения $\sigma_{1,\text{пр}}$ в функции от σ_2/σ_1 как при положительном, так и отрицательном значении этого отношения. При $\sigma_2 > \sigma_{02}$ и $\sigma_1 > \sigma_{01}$ пользуемся формулами (5) и (а). При $\sigma_2 < \sigma_{02}$ и $\sigma_1 > \sigma_{01}$ применяем формулы (6) и (б). Сплошной линией изображена зависимость по энергетической теории, пунктиром — по Сен-Венану (рис. 3).

Рассмотрим некоторые примеры определения предельного напряжения для плоского и пространственного напряженных состояний.

Случай цилиндрического сосуда, когда $\sigma_2 = \sigma_1/2$, материал — сталь 3, для которой $n=3$; $k=5$; $\mu=0,3$; $\mu_{\text{пл}}=0,4$. По формуле (3) $A_{\sigma,\text{ос}} = \frac{1,045}{E}\sigma_т$. По выражению (6) имеем квадратное уравнение:

$$1,475\,\sigma_1^2 + 0,708\,\sigma_т\,\sigma_1 - 2.433\,\sigma_т^2 = 0, \tag{7}$$

откуда $\sigma_{1,\text{пр}} = 1,066\,\sigma_т$, что менее, чем по условию Мизеса на 7,6 %. Если применить наше деформационное условие предельного состояния по 2-й теории прочности [ф-ла (6)], то при $E_{1k} = E/5$

$$\frac{\sigma_1}{E_{1k}} - \sigma_{01}\left(\frac{1}{E_{1k}} - \frac{1}{E}\right) - \mu\,\frac{\sigma_2}{E} = \frac{1}{E}(5\sigma_т - 4\sigma_0) \tag{8}$$

и получим $\sigma_{1,\text{пр}} = 1,03\,\sigma_т$.

Случай чистого сдвига и кручения. Этот случай весьма важен для расчета на сдвиг элементов соединений с помощью сварки и заклепок.

Теперь $\sigma_2 = -\sigma_1$; $\sigma_{02} = -\sigma_{01}$. Модули $E_{1k} = E_2 = E/5$.

Приравняв выражения (5) и (3) и сокращая на E, придем к следующему уравнению:

$$7\sigma_1^2 - 5,001\,\sigma_т^2 = 0.$$

Откуда

$$\tau_{\text{пр}} = \sigma_{1,\text{пр}} = 0,845\,\sigma_т, \tag{9}$$

что больше, чем по Мизесу на 31 %. По 2-й теории прочности $\sigma_{1,\text{пр}} = 0,86\,\sigma_т$. Опыты показывают, что решение (9) ближе к данным эксперимента, чем решение по Сен-Венану.

Случай объемного напряженного состояния. Пусть $\sigma_2 = 0,4\,\sigma_1$, $\sigma_3 = 0,3\,\sigma_1$. Имеем смешанное напряженное состояние. Для стали 3 $n=3$; $E_{1k} = E/5$.

Приравняв выражения (2') и (3), получим следующее квадратное уравнение:

$$0,93\,\sigma_1^2 + 1,141\,\sigma_т\,\sigma_1 - 2.433\,\sigma_т^2 = 0.$$

Откуда $\sigma_{1,\text{пр}} = 1,116\,\sigma_т$, что на 26,7 % меньше, чем по классической теории Мизеса.

Переходя к выводам, отметим, что в статье получены новые выражения для предельных состояний, в которые входят, наряду с упругими характеристиками E и μ, упруго-пластические постоянные E_{ik}, $\mu_{пл}$, k.

Естественно, при этом получаются результаты, в ряде случаев отличные от значений, найденных по условию Мизеса (в особенности для сдвига). Энергия изменения формы меняет свое значение в зависимости и от соотношений между σ_2 и σ_1, и от двух коэффициентов и от отношения модулей E_{ik}/E. Отметим, что результаты, полученные по Сен-Венану, в ряде случаев близки к данным, полученным по 4-й теории прочности при учете пластических деформаций. Так, при плоском напряженном состоянии (рис. 3) для цилиндрического сосуда значения предельных напряжений отличаются всего на 3% (1,066 вместо 1,03).

При равномерном растяжении по трем ортогональным осям, получаем конечное значение предельного напряжения $\sigma_{1,пр}=1{,}362\sigma_т$.

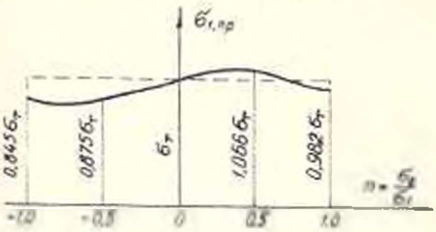

Рис. 3

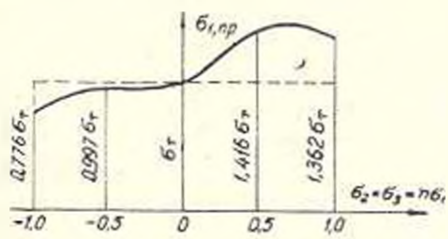

Рис. 4

Характерно, что по данным здесь зависимостям имеем конечные значения $\sigma_{пр}$, в то время, как по Мизесу $\sigma_{1,пр}=\infty\sigma_т$. Зависимость предельного напряжения от $\sigma_2=\sigma_3=n\sigma_1$ представлена нами на рис. 4 для $\mu_{пл}=0{,}4$. При увеличении $\mu_{пл}$ и случае $n=1$ предельное напряжение увеличивается, но остается конечным; при растяжении по одному направлению и сжатии по ему перпендикулярным направлениям $\sigma_{1,пр}$ уменьшается (рис. 4).

Критерий прочности в общем случае пишется по энергетической теории прочности в виде равенства:

$$A_ф^{уп}=A_{ф,ос}. \tag{10}$$

Это равенство при введенной здесь билинейной связи σ и ε представляется полиномом второй степени. Зависимость (10) дает квадратичную функцию от предельного напряжения, что подтверждается и критерием В. В. Новожилова, выражение которого представляется также в виде полинома второй степени.

ЛИСИ Поступило 12.XII.1971

Ն. Կ. ՍՆԻՏԿՈ

ՍԱՀՄԱՆԱՅԻՆ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿՆԵՐԸ ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԶԱՐԳԱՑՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿ

Ամփոփում

Հոդվածում տրված են առաձգա-պլաստիկական տիրույթում լարումների և դեֆորմացիաների կապի հիմնական արտահայտությունները պլաստիկ պողպատների համար։ Կազմված են դեֆորմացիոն պայմաններ գլխավոր լարումների սահմանային արժեքների համար՝ նկատի ունենալով պլաստիկական դեֆորմացիաների զարգացումը ծավալային և հարթ լարվածային վիճակներում։ Կատարված է համադրում Միզեսի և Սեն-Վենանի լուծումների հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Снитко Н. К.* К физической теории упруго-пластических деформаций. «Известия АН СССР. Механика твердого тела», № 5, 1973.
2. *Снитко Н. К.* Техническа мисъл. Българска АН, «Строителство», № 6, 1972, София.