

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Լ. Ա. ԺԱԿԱՇՅԱՆ

К СИНТЕЗУ НАПРАВЛЯЮЩИХ СИММЕТРИЧНЫХ
МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ КВАДРАТИЧЕСКОГО
ПРИБЛИЖЕНИЯ

При решении задачи синтеза приближенно направляющих механизмов зачастую заданная кривая является симметричной кривой, как то: прямая, дуга окружности, дуги конических сечений и т. д. Естественно, что при этом нужно воспользоваться механизмом, дающим симметричные шатунные кривые. Таким является симметричный шарнирный механизм Чебышева [1], приведенный на рис. 1, где приняты следующие обозначения: $DA = b$; $AB = R$; $MC = CB = CD = c$.

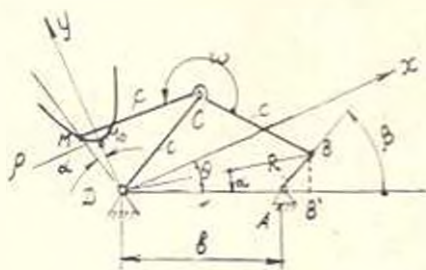


Рис. 1

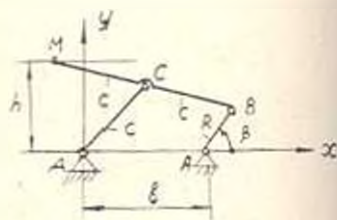


Рис. 2

1. Уравнение симметричной шатунной кривой. Если начало координат выбрать в точке D , а ось y направить по оси симметрии, то можно получить уравнение симметричной шатунной кривой шарнирного четырехзвенника в параметрической форме, где за переменный параметр принят угол β поворота кривошипа. Напишем уравнение в полярных координатах $\rho = \rho(\beta)$.

Из треугольника DMB имеем (рис. 1):

$$DM = \gamma = DB \cos \frac{\omega}{2} = \sqrt{4c^2 - (DB)^2} \cdot \sin \frac{\omega}{2},$$

а из треугольника DBA —

$$DB = \sqrt{b^2 + R^2 + 2bR \cos \beta}.$$

Следовательно,

$$\rho = \sqrt{b^2 + R^2 + 2bR \cos \beta} \cdot \cos \omega/2 = \sqrt{4c^2 - b^2 - R^2 - 2bR \cos \beta} \cdot \sin \omega/2.$$

Для перехода к декартовым координатам воспользуемся соотношениями:

$$x = \rho \sin \tau; \quad y = \rho \cos \tau. \quad (1)$$

Согласно рис. 1 из $\triangle DBB'$ имеем:

$$\cos \angle BDA = \cos \angle A_0DM = \cos \tau = \frac{DB'}{DB} = \frac{AD + AB'}{DB} = \frac{b + AB'}{DB},$$

где

$$AB' = R \cos \beta.$$

Следовательно,

$$\cos \tau = \frac{b + R \cos \beta}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR \cos \beta}},$$

$$\sin \tau = \frac{R \sin \beta}{\sqrt{b^2 + R^2 - 2bR \cos \beta}}.$$

Подставляя значения ρ , $\cos \tau$, $\sin \tau$ и (1), получим уравнение симметричной шатуновой кривой в декартовых координатах, выраженное через параметры схемы механизма и переменный параметр β .

$$y = (b + R \cos \beta) \left(\cos \frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\frac{4c^2 - b^2 - R^2 - 2bR \cos \beta}{b^2 + R^2 - 2bR \cos \beta}} \cdot \sin \frac{\omega}{2} \right), \quad (2)$$

$$x = R \sin \beta \left(\cos \frac{\omega}{2} \pm \sqrt{\frac{4c^2 - b^2 - R^2 - 2bR \cos \beta}{b^2 + R^2 - 2bR \cos \beta}} \cdot \sin \frac{\omega}{2} \right). \quad (3)$$

Для частного случая $\omega = \pi$ имеем:

$$y = \pm (b + R \cos \beta) \sqrt{\frac{4c^2 - b^2 - R^2 - 2bR \cos \beta}{b^2 + R^2 - 2bR \cos \beta}}, \quad (4)$$

$$x = \pm R \sin \beta \sqrt{\frac{4c^2 - b^2 - R^2 - 2bR \cos \beta}{b^2 + R^2 - 2bR \cos \beta}}. \quad (5)$$

Угол β , образованный стойкой DA и осью Dx , будет:

$$\beta = \frac{\omega - \pi}{2}. \quad (6)$$

Вид шатуновой кривой определяется относительными размерами звеньев механизма. Для симметричного механизма достаточно задать три параметра, например, b , c и ω ($R=1$). Варьируя значением этих параметров, получим различные по своему характеру шатуновые кривые. Изменение характера шатуновых кривых особенно наглядно, когда при постоянных b и c варьирует значение угла ω .

2° Синтез прямолинейно-направляющего механизма Чебышева. Рассмотрим задачу приближения симметричной шатуновой кривой шарнирного четырехзвенника к прямой линии, которая решена Чебышевым [3] по условию минимального отклонения от заданной функции.

Для шарнирного четырехзвенника, изображенного на рис. 1, поз-

можно приближение симметричной кривой точки М к прямой линии, перпендикулярной к оси симметрии. Уравнение этой прямой

$$y = h. \quad (7)$$

Совместно решая (2) и (7) и произведя соответствующие преобразования, получим:

$$A[p_0 f_0(\beta) + p_1 f_1(\beta) + p_2 f_2(\beta) - F(\beta)] = 0, \quad (8)$$

где

$$f_0(\beta) = 1; \quad f_1(\beta) = \cos \beta; \quad f_2(\beta) = \cos^2 \beta; \quad F(\beta) = -\cos^2 \beta;$$

$$\left. \begin{aligned} 2bR^2 p_0 &= \left(h^2 - 2bh \cos \frac{\omega}{2} + b^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \right) (b^2 + R^2) + (h^2 + R^2 - 4c^2) b^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}; \\ bR^2 p_1 &= \left(h^2 - 2bh \sin \frac{\omega}{2} + b^2 \cos^2 \frac{\omega}{2} \right) b + h \cos^2 \frac{\omega}{2} (b^2 + R^2) + \\ &\quad + b^3 \sin^2 \frac{\omega}{2} + b(R^2 + b^2 - 4c^2) \sin^2 \frac{\omega}{2}; \\ 2bR p_2 &= R^2(b^2 + R^2) + \left(hR \cos \frac{\omega}{2} + bR \cos^2 \frac{\omega}{2} \right) 4bR + \\ &\quad + R^2 \sin^2 \frac{\omega}{2} (4b^2 - 4c^2); \\ A &= 2bR^3. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для случая $\omega = \pi$ имеем:

$$\left. \begin{aligned} 2R^3 p_0 &= (b^2 + R^2)(h^2 + b^2) - 4c^2 b^2; \\ R^2 p_1 &= 2b^2 + h^2 + R^2 - 4c^2; \\ 2b p_2 &= R(5b^2 + R^2 - 4c^2). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Выражение (8) позволяет решить задачу синтеза симметричных прямолинейно-направляющих механизмов методом квадратичного приближения.

При квадратическом приближении коэффициенты p_0 , p_1 и p_2 приближающей функции вычисляются из системы линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} c_{00} p_0 + c_{01} p_1 + c_{02} p_2 &= y_{00} \\ c_{10} p_0 + c_{11} p_1 + c_{12} p_2 &= y_{10} \\ c_{20} p_0 + c_{21} p_1 + c_{22} p_2 &= y_{20} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

где

$$c_{ik} = c_{ki} = \int_{\beta_0}^{\beta_1} f_i(\beta) f_k(\beta) d\beta;$$

$$\gamma_l = \int_{\beta_1}^{\beta_2} F(\beta) F_l(\beta) d\beta \quad (l, k = 0, 1, 2). \quad (12)$$

Найдем значения c_{lk} и γ_l в развернутом виде*:

$$\begin{aligned} c_{00} &= \int d\beta = \beta; \\ c_{01} &= c_{10} = \int \cos \beta d\beta = \sin \beta; \\ c_{11} &= c_{02} = c_{20} = \int \cos^2 \beta d\beta = \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{4} \sin 2\beta; \\ c_{12} &= c_{21} = -\gamma_0 = \int \cos^3 \beta d\beta = \sin \beta - \frac{1}{3} \sin^3 \beta; \\ c_{22} &= -\gamma_1 = \int \cos^4 \beta d\beta = \frac{3}{8} \beta + \frac{1}{4} \sin 2\beta + \frac{1}{32} \sin 4\beta; \\ \gamma_2 &= - \int \cos^5 \beta d\beta. \end{aligned} \quad (13)$$

После вычисления коэффициентов p_0 , p_1 и p_2 из системы уравнений (9) или (10) определяем три параметра. Отметим, что при известном значении угла ω и одного из параметров R , h , b системы (9) и (10) являются линейными.

Остановимся на решении поставленной задачи при $\omega = \pi$ и $R = 1$ (рис. 2). В этом случае, как следует из (6), $\theta = 0$.

Из системы (10) получим следующие выражения, позволяющие вычислить относительные параметры b , h и c :

$$b^4 - (3 + p_1)b^2 + 2(p_0 + p_2)b - p_1 = 0; \quad (14)$$

$$h = \sqrt{3b^2 - 2p_2b + p_1}; \quad (15)$$

$$c = 0,5\sqrt{5b^2 - 2p_2 + p_1}. \quad (16)$$

Среднее квадратичное отклонение определяем по формуле [1]:

$$\Delta_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{E - \gamma_0 p_0 - \gamma_1 p_1 - \gamma_2 p_2}{\beta_2 - \beta_1}}, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} E &= \int_{\beta_1}^{\beta_2} (p_0 + p_1 \cos \beta + p_2 \cos^2 \beta)^2 d\beta = \left[p_0^2 \beta + \right. \\ &+ (2p_0 p_1 + p_1^2) \left(\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{4} \sin 2\beta \right) + p_1^2 \left(\frac{3}{8} \beta + \frac{1}{4} \sin 2\beta + \frac{1}{32} \sin 4\beta \right) + \\ &+ 2p_0 p_2 \sin \beta + 2p_1 p_2 \left(\sin \beta - \frac{1}{3} \sin^3 \beta \right) \Big|_{\beta_1}^{\beta_2}. \end{aligned}$$

* Пределы интегрирования от β_1 до β_2 .

Как отмечалось выше, точка M шатуна описывает траекторию, симметричную относительно оси y , проходящей через точку O и перпендикулярной к линии DA (рис. 3). На прямолинейном участке координата y в точках O , 1 и 2 имеет экстремальные значения, обозначенные через y_0 , y_1 и y_2 , которые вычисляются по формуле [2]:

$$y_{1,2} = \frac{b}{2} [p^2 \pm 1 - p^2 \pm \sqrt{p^2 - 2(1-p^2)}] \sqrt{\frac{4c}{c \pm \sqrt{p^2 - 2(1-p^2)}}} - 1, \quad (18)$$

где

$$p = R/b; \quad c = c/b; \quad y_0 = \sqrt{4c^2 - (b+R)^2}. \quad (19)$$

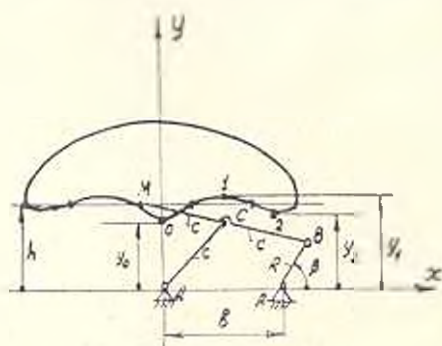


Рис. 3

В формуле (18) только один знак перед корнем соответствует y_1 ; второй знак соответствует y_0 .

Прямолинейный участок траектории шатунной кривой точки M будет располагаться между двумя параллельными прямыми $y = y_1$ и $y = y_0$, между которыми и находится прямая $y = h$, к которой приближается указанная траектория.

Длина прямоугольного участка

$$l = 2x, \quad (20)$$

Подставляя значение x из (5) в (20), получим:

$$l = 2R \sin^2 \theta \sqrt{\frac{4R^2}{b^2 + R^2 + 2bR \cos \theta}} - 1. \quad (21)$$

3. Пример. Для пояснения предложенной методики синтеза рассмотрим пример вычисления параметров симметричного приближения прямолинейно-направляющего механизма.

Пусть требуется спроектировать симметричный четырехшарнирный прямолинейно-направляющий механизм с чертящей точкой M на оси шатуна (случай $\kappa = \pm$, $\Theta = 0$) при углах поворота кривошипа $\beta_1 = 0^\circ$, $\beta_2 = 90^\circ$.

Задачу решаем методом квадратичного приближения. По формулам (12) и (13) определяем коэффициенты c_{ik} , γ_i и, подставляя их в выражение (11), получим систему линейных уравнений:

$$1,570796 p_0 + 1,000000 p_1 + 0,785398 p_2 = -0,666666;$$

$$1,000000 p_0 + 0,785398 p_1 + 0,666666 p_2 = -0,589049;$$

$$0,785398 p_0 + 0,666666 p_1 + 0,589049 p_2 = -0,533333.$$

Решением этой системы уравнений получаются значения коэффициентов:

$$p_0 = -0,06409019; \quad p_1 = 0,70201833; \quad p_2 = -1,61448349.$$

Подставляя эти значения в уравнение (14), получим:

$$b^4 - 3,70201833b^2 - 3,35714716b - 0,70201333 = 0.$$

Корнями данного уравнения являются:

$$b_1 = 2,300813; \quad b_2 = -1,136412; \quad b_3 = 0,316751; \quad b_4 = -0,847620.$$

Относительная длина стойки $b = 2,300813$. (При данной постановке задачи отрицательные значения корней не имеют смысла.)

Относительные величины параметров h и c , вычисленные по формулам (15) и (16), будут:

$$h = 4,90025; \quad c = 2,53724.$$

Относительная длина прямолинейного участка траектории чертящей точки M , вычисленная по формуле (21) $l = 4,2638$.

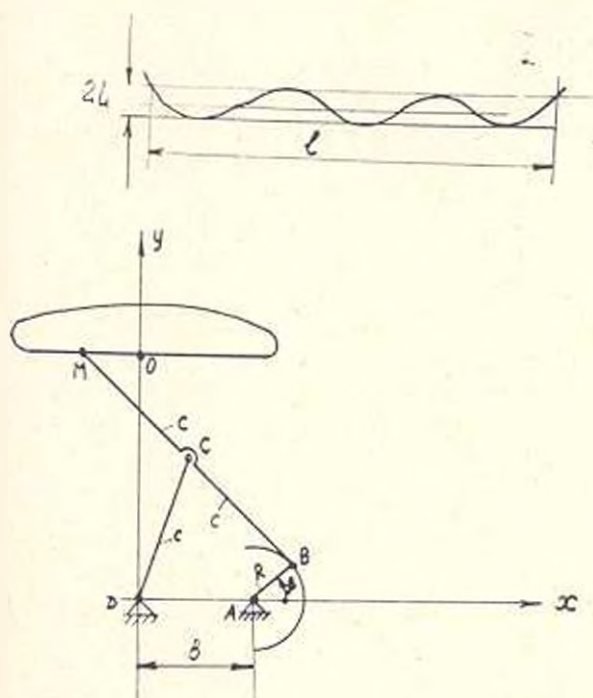


Рис. 1

По формулам (18) и (19) определяем экстремальные значения координат:

$$y_0 = 4.89925; \quad y_2 = 4.8984893; \quad y_1 = 4.90138389.$$

На прямолинейном участке длиной 4,2638 шатунная кривая чертащей точки M расположена между двумя параллельными прямыми, расстояние между которыми $2L = y_1 - y_2 = 0,00289 R$. Среднее квадратичное отклонение, определяемое по формуле (17), будет: $\Delta_{kl} = 0,000276$.

Кинематическая схема приближенно прямолинейно-направляющего механизма с изображением прямолинейного участка показана на рис. 1.

Предложенным методом возможен также синтез симметричных шарнирных четырехзвеников, направляющих по дугам окружностей и по дугам гипербол.

Независимо от того, приближаем ли траекторию шатунной точки к прямой, окружности или гиперболе, приближающая функция имеет один и тот же вид. Поэтому значения коэффициентов p_0, p_1, p_2 приближайшей функции зависят только от величины угла поворота кривошипа, соответствующего участку приближения.

БрГУ

Поступило 11.11.1975.

Գ. Ս. ԶԱՐԱՑՊԱՆՆԱՆ

ՄԻՍԵՏՐԻԿ ՈՐԿՆԱՐԿ ՄԵԿԱՆԻԶՄՆԵՐԻ ՍԻՆԹԵԶԻ ՔՍՈՒԿՈՒՍԱՅԻՆ ՄՈՏԵՅՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Ստացված է Ջերիշևի մեխանիզմի շարժաթևային կորի համապատասխանաբանական տեսքով, որտեղ որպես փոփոխական պարամետր ընդունված է շուտափրկի պտտման անկյունը։ Այնուհետև լուծված է վերոհիշյալ մեխանիզմի սինթեզի խնդիրը։ Լուծված է մասնավոր խնդիր՝ նախազգծված է սինթետիկ քառոցյակ ուղղորդ մեխանիզմ շուտափրկի պտտման 0 և 90 անկյունների դեպքում։

ЛИТЕРАТУРА

1. Ариболевский Н. Н., Левитский Н. Н. и Чернушин С. А. Синтез плоских механизмов. Физматгиз, М., 1959.
2. Баранов Г. Г. Курс теории механизмов и машин. Изд. «Машиностроение», М., 1967.
3. Чебышев П. Л. О простейшей составчатой системе, доставляющей движения, симметрические около оси. Собр. соч., т. IV, изд. АН СССР, 1948.