ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXVIII, №2, 1975 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Л. О. МЕЛКУМЯН, Э. О. МОВСЕСЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Интегральный критерий устойчивости [1] обобщается на линейных стационарных системах с любым числом запаздываний. Приводится простая и эффективная оценка степени устойчивости систем с запаздываниями с помощью вспомогательной функции—действительной части логарифмической производной характеристического квазиполинома.

Введение. Рассматривается линейная стационарная система, описываемая следующим дифференциально-разностным уравнением с запаздывающим аргументом:

$$\sum_{p=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} x^{(p)} (t-\tau_j) = f(t), \tag{1}$$

где $0=\tau_0<\tau_1< \cdots <\tau_m$; $a_{n0} \neq 0$; $a_{nj}=0$; $j=1, 2, \cdots, m$. Характеристическим уравнением дифференциально-разностного уравнения (1) будет

$$F(z)=\sum_{p=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{pj} z^p e^{-\tau_j z} = 0. \tag{2}$$

Левая часть уравнения (2) называется харктеристическим квазиполиномом.

В статье интегральный критерий устойчивости линейных стационарных систем с запаздыванием [1] обобщается для любого (конечного) числа запаздываний и, наряду с простотой и наглядностью, удобен при реализации на ЦВМ.

Трудности нахождения всех корней характеристического квазиполинома и построения переходной функции системы с запаздывающими звеньями для ее качественного анализа приводят к косвенным методам оценки параметров переходной функции систем.

Для оценки быстродействия—одного из важного параметра переходного процесса системы—используется понятие степени устойчивости [2]. Под степенью устойчивости γ_1 понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня, т. е.

$$\gamma_1 = |\operatorname{Re} z_k|_{\min}.$$

Существующие методы [3] оценки γ_1 мало пригодны для их реализации на ЦВМ, и, следовательно, возникает необходимость нахождения новых рациональных методов оценки η, легко реализуемых на ЦВМ. В настоящей статье предлагается простая и эффективная оценка степени устойчивости системы с запаздываниями, основанная на нахождении максимума вспомогательной функции.

Критерий устойчивости. Теорема. *Для асимптотической устойчивости системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы выполнилось условие*

$$\int_{0}^{\infty} R(\omega)d\omega = \pi n, \tag{3}$$

где

$$R(\omega) = \frac{d}{d\omega}[\arg F(i\omega)]. \tag{4}$$

Доказательство. Согласно принципу аргумента, если функция $f(z)$ аналитична на замкнутом контуре S и не обращается на этом контуре в нуль, а внутри контура S имеет конечное число полюсов и нулей, то имеет место

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{S}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\operatorname{Arg} f(z)|_{S} = q - p, \tag{5}$$

где p — число полюсов, q — число нулей функции внутри контура S; причем полюс или нуль считаются столько раз, какова их кратность.

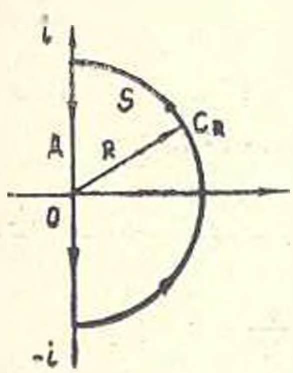

Рис. 1

В качестве функции $f(z)$ возьмем квазиполином (2), а в качестве контура интегрирования S — отрезок мнимой оси $Д$, лежащий в правой полуплоскости полуокружности C_R (рис. 1). Квазиполином (2) на правой полуплоскости может иметь только ограниченное число q нулей и не имеет полюсов. При достаточно большом R эти q нулей окажутся внутри контура S, и тогда формулу (5) можно записать в виде:

$$\oint_S \frac{F'(z)}{F(z)}\,dz = \operatorname{Arg} F(z)|_S = 2\pi q. \tag{6}$$

Преобразуем квазиполином (2):

$$F(z) = N_0(z)\left[1 + \frac{N_1(z)}{N_0(z)}e^{-\tau_1 z} + \frac{N_2(z)}{N_0(z)}e^{-\tau_2 z} + \ldots + \frac{N_m(z)}{N_0(z)}e^{-\tau_m z}\right].$$

Тогда, согласно (6),

$$\operatorname{Arg} N_0(z)|_S - 2\pi q = -\operatorname{Arg}\left[1 + \frac{N_1(z)}{N_0(z)}e^{-\tau_1 z} + \frac{N_2(z)}{N_0(z)}e^{-\tau_2 z} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{N_m(z)}{N_0(z)}e^{-\tau_m z}\right]\Bigg|_S .$$

Приращение аргумента на контуре S равно сумме приращений аргументов на $Д$ и C_R. Так как степень многочлена $N_0(z)$ больше степени многочленов $N_j(z)$ ($j=1, 2, \ldots, m$), то на дуге C_R окружности $z=R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $\left(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ модуль $\frac{N_j(z)}{N_0(z)} \to 0$ при $R\to\infty$. Модуль $e^{-\tau_j z}$ ($j=1, 2, \ldots, m$), равный $e^{-R\tau_j\cos\varphi}$, также стремится к нулю. Отсюда следует, что

$$\operatorname{Arg}\left[1 + \frac{N_1(z)}{N_0(z)}e^{-\tau_1 z} + \frac{N_2(z)}{N_0(z)}e^{-\tau_2 z} + \ldots + \frac{N_m(z)}{N_0(z)}e^{-\tau_m z}\right]\Bigg|_{C_R} \to 0$$

при $R\to\infty$.

Пусть многочлен $N_0(z)$ имеет f нулей, лежащих в правой полуплоскости, и не имеет нулей на мнимой оси. При достаточно большом R эти f нулей окажутся внутри контура S, и, согласно (5),

$$\operatorname{Arg} N_0(z)|_S = 2\pi f$$

или

$$2\pi(f-q) = -\operatorname{Arg}\left[1 + \frac{N_1(z)}{N_0(z)}e^{-\tau_1 z} + \frac{N_2(z)}{N_0(z)}e^{-\tau_2 z} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{N_m(z)}{N_0(z)}e^{-\tau_m z}\right]\Bigg|_Д .$$

Положив $z=i\omega$ и одновременно изменяя знак значения $2\pi(f-q)$ и направление обхода контура, получаем:

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg}\left[1 + \frac{N_1(i\omega)}{N_0(i\omega)}e^{-i\tau_1\omega} + \frac{N_2(i\omega)}{N_0(i\omega)}e^{-i\tau_2\omega} + \ldots + \frac{N_m(i\omega)}{N_0(i\omega)}e^{-i\tau_m\omega}\right] =$$

$$= 2\pi(f-q).$$

Применяя к многочлену $N_0(z)$ критерий Михайлова для систем без запаздываний [4], получаем:

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} N_0(i\omega) = (n-2f)\pi.$$

следовательно,

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} F(i\omega) = \underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} N_0(i\omega) + \underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} \left[1 + \frac{N_1(i\omega)}{N_0(i\omega)} e^{-i\tau_1\omega} + \right.$$

$$\left. + \frac{N_2(i\omega)}{N_0(i\omega)} e^{-i\tau_2\omega} + \cdots + \frac{N_m(i\omega)}{N_0(i\omega)} e^{-i\tau_m\omega} \right] = (n-2f)\pi + 2\pi(f-q) =$$

$$= \pi(n-2q). \tag{7}$$

Соотношение (7) показывает, что критерий Михайлова остается справедливым для системы (1). Нетрудно заметить, что соотношение (7) можно записать в виде

$$\underset{-\infty<\omega<\infty}{\Delta \arg} F(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{d\omega} [\arg F(i\omega)] d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) d\omega. \tag{8}$$

Согласно (7) и (8), окончательно получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) d\omega = \pi(n-2q). \tag{9}$$

Так как для асимптотической устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы $q=0$, то справедливость теоремы становится очевидной.

Формулы вычисления. Положив в (2) $z = i\omega$, получаем:

$$F(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega) \quad \text{и} \quad \arg F(i\omega) = \operatorname{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)},$$

следовательно,

$$R(\omega) = \frac{d}{d\omega} [\arg F(i\omega)] = \frac{UV' - U'V}{U^2 + V^2}, \tag{10}$$

если U и V одновременно не равны нулю, т. е. если квазиполином (2) не имеет нулей на мнимой оси. Учитывая, что $e^{-i\tau_j\omega} = \cos\tau_j\omega - i\sin\tau_j\omega$, получаем:

$$U = U_{x_0} + U_{x_1}\cos\tau_1\omega + V_{x_1}\sin\tau_1\omega + \cdots + U_{x_m}\cos\tau_m\omega + V_{x_m}\sin\tau_m\omega,$$

$$V = V_{x_0} + V_{x_1}\cos\tau_1\omega - U_{x_1}\sin\tau_1\omega + \cdots + V_{x_m}\cos\tau_m\omega - U_{x_m}\sin\tau_m\omega, \tag{11}$$

где

$$U_{x_j}(\omega) = \operatorname{Re} N_j(i\omega), \quad V_{x_j}(\omega) = \operatorname{Im} N_j(i\omega).$$

В силу четности функций U_{x_j}, $\cos\tau_j\omega$, V_{x_j} и нечетности функций

V_{X_j}, $\sin\tau_j\omega$, U'_{X_j} нетрудно заметить, что U и V' являются четными функциями, а U' и V — нечетными. Поэтому, согласно (10), функция $R(\omega)$ четная, т. е. $R(\omega)=R(-\omega)$.

В силу сходимости и четности подынтегральной функции $R(\omega)$ условие (3) можно привести к виду

$$\int\limits_0^{\infty} R(\omega)d\omega \approx \pi n/2. \tag{12}$$

Пример. Определить устойчивость линейной стационарной системы с запаздыванием, имеющей характеристический квазиполином

$$F(z)=0{,}1z^2+0{,}3z+0{,}5+(0{,}1z+0{,}2)e^{-\tau_1 z}+(0{,}2z+0{,}3)e^{-\tau_2 z}.$$

Решение. Вспомогательная функция $R(\omega)$ строится по формуле (10), где U и V определяются из (11). С помощью численного интегрирования интеграла $\int\limits_0^{\infty} R(\omega)d\omega$ в интервале (0,20) при $\tau_1=3{,}0$ и $\tau_2=1{,}5$ получаем:

$$\int\limits_0^{20} R(\omega)d\omega=3{,}0456\approx\pi,$$

следовательно, согласно критерию (12), система асимптотически устойчива. При $\tau_1=2{,}5$ и $\tau_2=1{,}7$ получаем:

$$\int\limits_0^{20} R(\omega)d\omega=-3{,}15717\approx-\pi<\pi,$$

следовательно, система неустойчива.

В работе [1] показано преимущество предлагаемого критерия устойчивости и приведена его сравнительная оценка. К сказанному можно добавить, что если в системе функционируют запаздывающие звенья, числом более одного, то проверка системы на устойчивость по критериям Найквиста и Михайлова чрезмерно усложняется [5]. Интегральный критерий устойчивости лишен этого недостатка, и увеличение числа запаздывающих звеньев мало усложняет процесс проверки устойчивости.

Вспомогательная функция $R(x)$. Пусть характеристический квазиполином линейных стационарных систем с запаздываниями имеет вид:

$$f(z)=\sum_{p=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}a_{pj}\,z^p e^{-\tau_j z}, \tag{13}$$

где $0=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_m$; $a_{n0}\neq 0$; $a_{nj}=0$; $j=1,2,\cdots,m$.

Рассмотрим возможность разложения (13) на множители, соответствующие их нулям, аналогично разложению, существующему у многочленов.

На основе теоремы Вейерштрасса [6,7] любую целую функцию можно разложить в бесконечное произведение, соответствующее ее нулям, т. е.

$$F(z)=z^{\lambda}\exp[g(z)]\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left[\frac{z}{z_k}+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2+\cdots+\frac{1}{p}\left(\frac{z}{z_k}\right)^p\right], \tag{14}$$

где λ — порядок нуля функции в начале координат, $g(z)$ — некоторая целая функция, p — целые числа и выбраны так, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{z_k}\right)^{p+1}.$$

По теореме Адамара, если целая функция конечного порядка ρ, то в разложении Вейерштрасса (14) можно принять

$p=E(\rho)$ (целая часть ρ)

и в качестве $g(z)$ взять многочлен степени не выше $E(\rho)$.

Из теоремы о порядке суммы и произведения [7] нетрудно заметить, что квазиполином (13) имеет порядок $\rho=1$, поэтому для него $p=1$, $g(z)=az+b$ и, следовательно, для квазиполинома (13) разложение Вейерштрасса принимает вид:

$$f(z)=z^{\lambda}\exp(az+b)\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_k}\right)\exp\left(\frac{z}{z_k}\right). \tag{15}$$

Вставим в (15) $z=ix$, $z_k=x_k+iy_k$ и рассмотрим ее производную от аргумента. Получаем

$$\frac{d}{dx}\left|\arg f(ix)\right|=R(x)=a+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-x_k}{x_k^2+(x-y_k)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{x_k^2+y_k^2}. \tag{16}$$

Полагая в (16) $x=0$, находим неопределенный параметр $a=R(0)$, следовательно,

$$R(x)=R(0)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-x_k}{x_k^2+(x-y_k)^2}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{x_k^2+y_k^2}. \tag{17}$$

Оценка степени устойчивости. Теорема. *Если система с запаздываниями* (1) *устойчива, то ее степень устойчивости не меньше обратной величины наибольшего значения функции* $1/[R(x)+\tau_m/2]$.

Доказательство. Согласно выражению (16) имеем:

$$\sup_x R(x) = a + \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k^2 + y_k^2} + \sup_x \sum_{k=1}^{n} \frac{-x_k}{x_k^2 + (x - y_k)^2} \tag{18}$$

В силу асимптотической устойчивости системы ($x_k < 0$) из равенства (18) можно перейти к неравенству

$$\sup_x R(x) > a + \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k^2 + y_k^2} + \sup_x \frac{-x_k}{x_k^2 + (x - y_k)^2},$$

отсюда

$$-x_k > 1/\sup_x |R(x) - a - \alpha|$$

или

$$|x_k| > 1/\sup_x |R(x) - a - \alpha|, \tag{19}$$

где

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_k^2 + y_k^2}.$$

Так как неравенство (19) справедливо для всех x_k, то при $x_k = |\mathrm{Re}\, z_k|_{min}$ получается

$$\eta = |\mathrm{Re}\, z_k|_{min} > 1/\sup |R(x) - \alpha - a|. \tag{20}$$

Так как рассматривается квазиполином с действительными коэффициентами, то его корни являются парами комплексно-сопряженных чисел, и сумма двух компонентов

$$\frac{-x_k}{x_k^2 + (x - y_k)^2} + \frac{-x_k}{x_k^2 + (x + y_k)^2} + \frac{2x_k}{x_k^2 + y_k^2},$$

соответствующих сопряженным корням, является четной функцией. Следовательно, функция $R(x)$ также четная, т. е.

$$R(x) = R(-x). \tag{21}$$

Из четности функции $R(x)$ и (20) окончательно получаем

$$\eta > \delta = 1/\sup_{0 \le x < \infty} |R(x) + c|, \tag{22}$$

где $c = -(a + \alpha)$.

Для определения c используем интегральный критерий устойчивости линейных систем с запаздыванием (12):

$$\int_0^\infty R(x)dx = \pi n/2, \tag{23}$$

который на основании формулы (17) можно представить в виде:

$$\int_0^\infty R(x)dx = \int_0^\infty R(0)dx + \int_0^\infty \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k\, dx}{x_k^2 + y_k^2} + \int_0^\infty \sum_{k=1}^{n} \frac{-x_k\, dx}{x_k^2 + (x - y_k)^2} = \pi n/2. \tag{24}$$

В силу сходимости (23), интеграл (24) получается:

$$\int_0^s R(x)dx = \int_0^s R(0)dx + \int_0^s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k\,dx}{x_k^2+y_k^2} + \int_0^s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-x_k\,dx}{x_k^2+(x-y_k)^2} \approx \pi n/2, \quad (25)$$

где s выбирается так, чтобы выполнялось условие

$$\left| \int_s^{\infty} R(x)dx \right| < \varepsilon.$$

После интегрирования (25) получаем:

$$R(0)\cdot s + \alpha s + N(s)\cdot \pi \approx \pi n/2, \quad (26)$$

где $N(x)$ — число корней квазиполинома в интервале $(0, s)$.
Разделив равенство (26) на s, получим

$$|\alpha + R(0)| = \pi\,\frac{N(s)}{s} - \frac{\pi n}{2s}. \quad (27)$$

Число корней квазиполинома в интервале $(0, s)$ можно определить по формуле [8]

$$\frac{s\tau_m}{2\pi} - m < N(s) < \frac{s\tau_m}{2\pi} + m.$$

При достаточно большом s число корней в интервале $(0, s)$ можно принять

$$N(s) \approx \frac{s\tau_m}{2\pi}. \quad (28)$$

Подставляя (28) в (27), окончательно получаем:

$$-|\alpha + R(0)| = c - \frac{\tau_m}{2}. \quad (29)$$

Пример. Дан характеристический квазиполином линейной системы с запаздыванием:

$$2z^2 + 0{,}5z + 2 + e^{-\tau z} = 0.$$

Определим запас α устойчивости системы. Значение вычислим по формуле (22), где

$$U = -2x^2 + 2 + \cos(\tau x); \qquad U' = -4x - \tau\sin(\tau x);$$

$$V = 0{,}5x - \sin(\tau x); \qquad V' = 0{,}5 - \tau\cos(\tau x).$$

При $\tau = 5$ $\sup\limits_{x} R(x) = 19{,}0$. Вставляя величины τ и $\sup\limits_{x} R(x)$ в неравенство (22), получаем значение запаса устойчивости линейной системы с запаздыванием $\alpha > 0{,}04658$. При изменении значения τ от 0 до

6 система остается устойчивой [1] в двух интервалах: $0 \leqslant \tau < 0,54$ и $3,78 \leqslant \tau < 5,85$. На рис. 2 показано изменение σ в первых двух устойчивых интервалах системы, и, как видно, система максимально устойчива при $\tau = 0$, т. е. звено запаздывания снижает устойчивость системы.

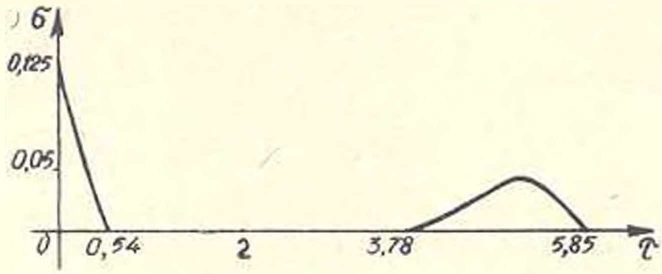

Рис. 2

ЕрНИИММ Поступило 4.IV 1974.

Վ. Հ. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ, Է. Հ. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ՀԱՊԱՂՈՒՄՆԵՐՈՎ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ

Ամփոփում

Բերված է վերջավոր թվով հապաղումներով գծային ստացիոնար համակարգերի կայունության նոր ինտեգրալային չափանիշ։ Ցույց է տրված ինտեգրալային կայունության չափանիշի համարժեքությունը Նայքվիստի և Միխայլովի չափանիշների նկատմամբ։ Բացի այդ, այն ավելի պարզ է և հարմար հաշվողական տեսակետից։

Հոդվածում դիտվում է գծային ստացիոնար հապաղման օղակներով ավտոմատիկ կայուն համակարգերի կայունության տիրույթի գնահատման խնդիրը։

Նման համակարգերի կայունության տիրույթը գնահատելու համար տրվում է նոր մեթոդ, որտեղ կայունության տիրույթի գնահատման խնդրի լուծումը բերվում է միաչափ ֆունկցիայի մաքսիմումը գտնելու խնդրին։ Ստացված կայունության տիրույթի նոր գնահատականը կարելի է օգտագործել հապաղումներով համակարգերը հետազոտելու համար։ Առաջարկված մեթոդով ստացված բանաձևը հեշտությամբ կարելի է վերածել մեքենայական ալգորիթմի։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мелкумян Д. О.* Определение устойчивости линейных систем с запаздыванием. «Известия АН АрмССР (серия Т. Н.)», № 6, 1972.
2. *Бесекерский В. А., Попов Е. П.* Теория систем автоматического регулирования. Изд. «Наука», 1966.
3. *Цыпкин Я. З.* Степень устойчивости систем с запаздывающей обратной связью. «Автоматика и телемеханика», т. 8, № 3, 1947.
4. *Гноенский Л. С., Каменский Г. А., Эльсгольц Л. Э.* Математические основы теории управляемых систем. Изд. «Наука», 1969.
5. *Зверкин А. М., Каменский Г. А., Норкин С. Б., Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом. УМН 17, вып. 2 (104), 1962.
6. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций. Изд. «Наука», 1968.
7. *Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н.* Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Труды матем. института им. Стеклова, 26, 1949.
8. *Зверкин А. М.* Разложение в ряд решений линейных дифференциально-разностных уравнений. Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами, 3, 1965.