

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Օ. Ի. ԳԱՏՔԱՐՅԱՆ

МНОГОСВЯЗНАЯ КОМБИНИРОВАННАЯ СИСТЕМА
 СТАБИЛИЗАЦИИ

Одним из способов повышения динамической точности следящих систем и систем стабилизации является применение теории комбинированного управления, когда наряду с управлением по отклонениям в систему вводятся разомкнутые связи по управляющим или возмущающим воздействиям [1].

Рассмотрим трехосную систему стабилизации (ТСС) платформы, установленной на подвижном основании (ПО).

На рис. 1 приведена матричная структурная схема подобной системы, где $\vec{\varphi}_{\text{вх}}(p)$, $\vec{\varphi}_{\text{вых}}(p)$, $\vec{z}(p)$, $\vec{f}_{\text{вн}}(p)$ — векторы входа, выхода, ошибки и возмущающего движения ПО; R — матрица жестких взаимных связей между взаимно ортогональными каналами стабилизации; $\text{diag}\{W_i(p)\}$ — диагональная матрица передаточных функций отдельных каналов.

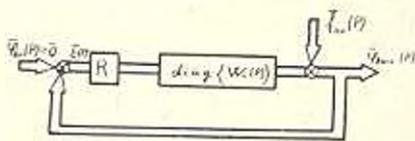


Рис. 1

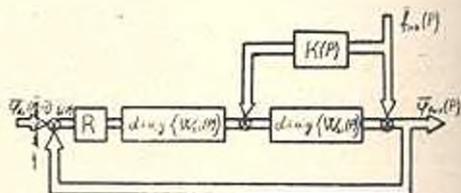


Рис. 2

Вектор установившейся ошибки ТСС можно записать в следующем виде:

$$\vec{z}(t) = C_0 \vec{f}_{\text{вн}}(t) + C_1 \frac{d\vec{f}_{\text{вн}}(t)}{dt} + \dots + C_k \frac{d^k \vec{f}_{\text{вн}}(t)}{dt^k} - \dots \quad (1)$$

Квадратные матрицы C_k ($k=0, 1, 2, \dots, 1$ в выражении (1) называются матрицами коэффициентов ошибок ТСС по отношению к возмущающему движению ПО [1].

Если передаточные функции отдельных каналов стабилизации имеют r -ый порядок астатизма, то первые r матриц коэффициентов ошибок равны нулю.

Произвольный член в правой части выражения (1)

$$\bar{\varepsilon}_k(t) = C_k \frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

представляет собой составляющую вектора ошибки, вызванную k -ой производной вектора возмущающего движения ПО. В дальнейшем, в качестве обобщенной меры точности ТСС, примем евклидову норму (модуль) вектора ошибки

$$|\bar{\varepsilon}(t)| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \varepsilon_k^2(t)}. \quad (3)$$

Переходя в (1) от векторов к соответствующим нормам, получим:

$$\begin{aligned} |\bar{\varepsilon}(t)| &\leq |\varepsilon_0(t)| + |\varepsilon_1(t)| + \dots + |\varepsilon_k(t)| + \dots \leq \\ &\leq \|C_0\| \cdot |\bar{f}_{no}(t)| + \|C_1\| \cdot \left| \frac{d\bar{f}_{no}(t)}{dt} \right| + \dots + \|C_k\| \cdot \left| \frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k} \right| + \\ &\quad + \dots \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$|\varepsilon_k(t)| = \left| C_k \frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k} \right| \leq \|C_k\| \cdot \left| \frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k} \right|, \quad (5)$$

$k=0, 1, 2, \dots$

$\|C_k\|$ — произвольная норма матрицы C_k , согласованная с евклидовой нормой вектора [2].

Выражение (4) определяет верхнюю грань модуля вектора ошибки ТСС через модули векторов $\frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k}$ и нормы квадратных матриц C_k .

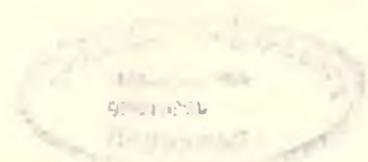
В случае введения в ТСС разомкнутых связей по возмущающему воздействию $\bar{f}_{no}(t)$ матричная структурная схема принимает вид, приведенный на рис. 2.

При этом условии полной инвариантности системы по отношению к возмущающему воздействию $\bar{f}_{no}(t)$ аналогично одномерному случаю

$$K(p) = \text{diag} \left\{ \frac{1}{W_{2i}(p)} \right\}. \quad (6)$$

Из (6) следует, что для обеспечения полной инвариантности ТСС платформы, установленной на ПО, необходимо (при $r > 0$) измерять скорости и ускорения требуемых порядков ПО относительно ортогональной системы координат $OX_1 X_2 X_3$, связанной с осями стабилизации платформы (рис. 3).

Однако, на практике, датчики, измеряющие скорости и ускорения ПО, часто устанавливаются (исходя из конструктивных соображений) вдоль ортогональных осей $OY_1 Y_2 Y_3$, смещенных относительно



осей стабилизации платформы (рис. 3). При этом данные датчики будут определять линейные комбинации скоростей и ускорений ПО относительно осей стабилизации платформы Ox_1, x_2, x_3 . Структурно это приводит к возникновению жестких взаимных связей в разомкнутой контуре комбинированной ТСС (рис. 4), где матрица $B = \{b_{ij}\}$ взаимных связей в разомкнутом контуре является матрицей преобразования системы координат Ox_1, x_2, x_3 в систему Oy_1, y_2, y_3 , связанную с

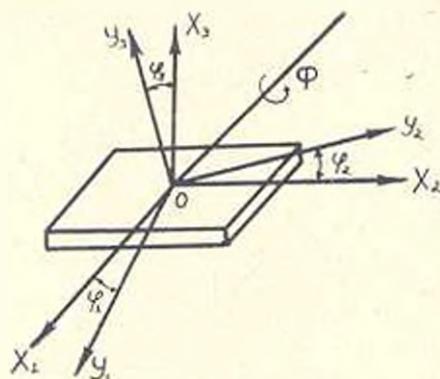


Рис. 3

осями установки датчиков. Проанализируем влияние взаимных связей в разомкнутом контуре комбинированной системы на точность стабилизации. Структурную схему по рис. 4 можно преобразовать в виду по рис. 5, откуда следует, что анализ влияния взаимных связей в разомкнутом контуре может быть осуществлен определением вектора ошибки исходной, не комбинированной системы (рис. 1) при замене вектора $\bar{f}_{10}(t)$ преобразованным вектором

$$\bar{f}_{10}^{np}(t) = [I - B] \bar{f}_{10}(t), \quad (7)$$

где I — единичная матрица.

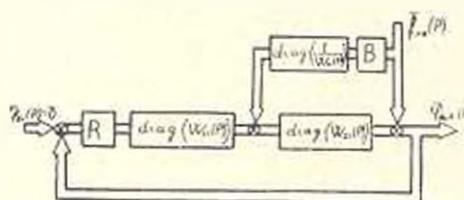


Рис. 4

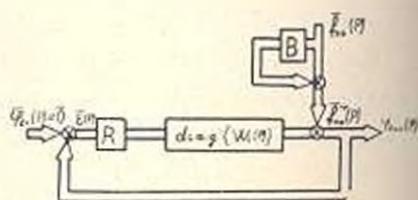


Рис. 5

Из (7) видно, что при $B = I$, т. е. при установке датчиков вдоль осей стабилизации платформы, $\bar{f}_{10}^{np}(t) = \bar{0}$ и, следовательно, $\bar{e}(t) = \bar{0}$. Физически это означает, что при $B = I$ имеет место полная инвариантность ТСС платформы по отношению к возмущающему движению ПО.

При произвольном взаимном расположении систем координат OX_1, X_2, X_3 и OY_1, Y_2, Y_3 , модуль вектора ошибки комбинированной системы можно определить при помощи выражения (4), т. е.

$$|\bar{e}(t)| \leq \|C_0\| \cdot |\bar{f}_{110}^{sp}(t)| + \dots + \|C_k\| \cdot \left| \frac{d^k \bar{f}_{110}^{sp}(t)}{dt^k} \right| + \dots \quad (8)$$

Если нормы матриц C_i ($i=0, 1, 2, \dots$) определены, то анализ влияния взаимных связей в разомкнутом контуре сводится к нахождению модулей векторов

$$\frac{d^k \bar{f}_{110}^{sp}(t)}{dt^k} = \frac{d^k}{dt^k} |I-B| \bar{f}_{110}(t) = |I-B| \frac{d^k \bar{f}_{110}(t)}{dt^k} \quad (9)$$

Для нахождения требуемых модулей векторов (9) воспользуемся понятием угла конечного поворота. По теореме Эйлера-Даламбера [3] любое взаимное положение двух прямоугольных систем координат может быть получено единственным поворотом на определенный угол вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат. Данный угол носит название угла конечного поворота и обозначается Φ (рис. 3).

Если задана матрица $B = \|b_{ij}\|$ преобразования системы координат OX_1, X_2, X_3 в систему OY_1, Y_2, Y_3 , то угол конечного поворота Φ и направляющие косинусы l_1, l_2, l_3 (рис. 3) оси вращения определяются следующим образом [4]:

$$\cos \Phi = \frac{\text{tr} B - 1}{2} = \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^3 \cos \varepsilon_i - 1 \right], \quad (10)$$

где $\text{tr} B = \sum_{i=1}^3 b_{ii}$ — след матрицы B ;

$$l_1 = \frac{b_{22} - b_{33}}{2 \sin \Phi}, \quad l_2 = \frac{b_{12} - b_{31}}{2 \sin \Phi}, \quad l_3 = \frac{b_{31} - b_{12}}{2 \sin \Phi} \quad (11)$$

Для определения модуля вектора ошибки комбинированной ТСС при произвольной величине угла Φ запишем выражение (9) в следующем виде:

$$\frac{d^k \bar{f}_{110}^{sp}(t)}{dt^k} = \frac{d^k \bar{f}_{110}(t)}{dt^k} - B \frac{d^k \bar{f}_{110}(t)}{dt^k} \quad (12)$$

$k=0, 1, 2, \dots$

Матрица B в (12) является ортогональной матрицей, удовлетворяющей условию

$$B^{-1} = B', \quad (13)$$

и сохраняет при умножении на векторы модули векторов и углы между ними [5].

Геометрически вектор $B \frac{d^k \bar{f}_{110}(t)}{dt^k}$ получается из вектора

$\frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k}$ поворотом на угол Φ вокруг оси вращения с направляющими косинусами l_1, l_2, l_3 (рис. 6).

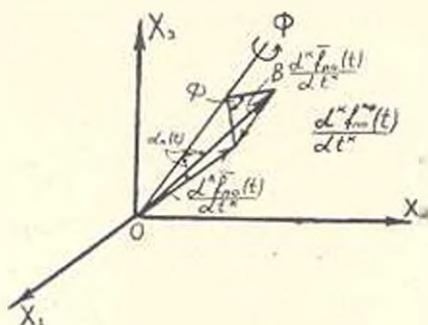


Рис. 6

Из рисунка 6 нетрудно видеть, что

$$\left| \frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k} \right| = \left| \frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k} - B \frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k} \right| = 2 \sin \frac{\Phi}{2} \sin \alpha_k(t) \left| \frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k} \right|, \quad (14)$$

$$k=0, 1, 2, \dots$$

где $\alpha_k(t)$ угол между осью конечного вращения и вектором $\frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k}$.

Подставив (14) в (8), получим:

$$|\bar{\varepsilon}(t)| \leq 2 \sin \frac{\Phi}{2} \left\{ \|C_{0d}\| \cdot |\bar{f}_{no}(t)| \sin \alpha_0(t) + \dots + \|C_k\| \cdot \left| \frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k} \right| \sin \alpha_k(t) + \dots \right\} \quad (15)$$

Выражение (15) определяет верхнюю грань модуля вектора ошибки комбинированной ТСС при жестких взаимных связях в разомкнутом контуре, характеризуемых ортогональной матрицей B .

Рассмотрение выражения (15) позволяет сделать следующие выводы:

При $\Phi = 0$ вектор ошибки ТСС тождественно равен нулю, т. е. условие полной инвариантности по отношению к возмущающему движению ПО выполняется.

При $\Phi \neq 0$ модуль вектора ошибки определяется углами $\alpha_k(t)$, образованными векторами $\frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k}$ ($k=0, 1, 2, \dots$) с осью конечного поворота.

Если какой-либо из векторов $\frac{d^k \bar{f}_{no}(t)}{dt^k}$ направлен по оси конечного поворота [$\alpha_k(t) = 0$], то ТСС инвариантна относительно данной

производной векторного возмущающего воздействия $\bar{f}_{по}(t)$ независимо от величины смещения систем координат OX_1, X_2, X_3 и OY_1, Y_2, Y_3 .

Если же вектор $\frac{d^2 \bar{f}_{по}(t)}{dt^2}$ не совпадает с осью конечного поворота, то он приводит к дополнительной составляющей ошибки комбинированной ТСС, причем данная составляющая будет наибольшей при $\alpha_k(t) = \frac{\pi}{2}$, т. е. в случае, когда вектор $\frac{d^2 \bar{f}_{по}(t)}{dt^2}$ лежит в плоскости, перпендикулярной оси конечного поворота.

Нетрудно показать, что аналогичные результаты можно получить и в случае обеспечения частичной инвариантности ТСС.

Получено 1 IX 1971

ՈՒՆՆԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ

ԿԱՅՈՒՆԱՅՄԱՆ ԲԱԿՄԱՆԱԿԱԳ ԿՈՄԲԻՆԱԾՅՎԱԾ ԶԱՐԿԱԿԱՐԿ

Ա ժ զ ի ռ ի ռ ի ժ

Դիտվում է շարժվող հիմքի վրա տեղադրված հենահարթակի կայունացման եռառանցք կոմբինացված համակարգը: Հետազոտվում է բաց կոնտուրում գտնվող փոխադարձ կոշտ կապերի աղղեցությունը կայունացման ճշտության վրա:

Ստացված է կոմբինացված համակարգի սխալի վեկտորի մոդուլի վերին սահմանը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

- 1 Под редакцией Рабиновича Л. В. Проектирование следящих систем. Изд. «Машиностроение», 1969.
- 2 Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функции и функционального анализа. Изд. «Наука», 1972.
- 3 Липтон А. Выставка инерциальных систем на подвижном основании. Изд. «Наука», 1971.
- 4 Корн Т., Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Изд. «Наука», 1973.
- 5 Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. Изд. «Наука», 1966.