

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Р. А. УШАНИ

ИЗГИБ ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ ПЛИТЫ ПРИ  
 ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

В статье рассматривается напряженное состояние железобетонной плиты при изгибе. Принимается, что в реологических соотношениях, описывающих напряженно-деформированное состояние бетонной части плиты, деформационные характеристики бетона существенно зависят от температуры.

Задачи, посвященные определению напряженного состояния железобетонных элементов с учетом ползучести, рассмотрены в работах [1-4]. При учете термоползучести бетона зависимость между напряжениями и деформациями запишется в виде [1]:

$$\sigma_{2ij}(t) = \sigma_1 \theta \delta_{ij} + \frac{1}{E_2(\theta)} [(1 + \nu) \sigma_{20}(t) - \nu \sigma_2(t) \delta_{ij}] - \frac{1}{E_2(\theta)} \int_0^t [(1 + \nu) \sigma_{2ij}(\tau) - \nu \sigma_2(\tau) \delta_{ij}] K[\theta, t, \tau] d\tau, \quad (i, j = 1, 2) \quad (1)$$

где

$\delta_{ij}$  — символ Кронекера;  $\sigma_2(t) = \sum \sigma_{2ij}(t) \delta_{ij}$ ;

$\theta(z)$  — относительная температура:

$$\theta(z) = \frac{T(z)}{T_0} = a_1 + \frac{\xi_1}{H} [h(x, y, t) - z]; \quad \sigma_1 = \sigma T_0$$

$T(z)$  — температурная функция;

$T_0$  — порог действия температуры на деформационные характеристики материала;

$a$  — коэффициент линейного расширения.

Выражения ядра ползучести и модуля упругости бетона при высоких температурах имеют следующий вид [7-9]:

$$K[\theta, t, \tau] = E_2(\theta, t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E_2(\theta, \tau)} + C[\theta, t, \tau] \right]; \quad E_2(\theta) = \beta \exp(-i\theta),$$

где  $C[\theta, t, \tau] = \beta_1 \{1 - \exp[-\gamma_1(t - \tau)]\} \exp(i_2 \theta)$  — мера ползучести;

$i = 0,15$ ,  $i_2 = 0,28$ ,  $\beta_1 = 1,12 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кД}$ ,  $\beta = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ ,  $P_0 = 1,162$  и  $\gamma_1 = 0,026 \text{ 1/день}$  — параметры, характеризующие деформационные свойства бетона при высоких температурах.

Связь между напряжениями и деформациями арматуры запишется в следующем виде [5]:

$$\varepsilon_{1ij} = \alpha_1 \Theta_1 \delta_{ij} + \frac{\sigma_{1ij}^a}{E_1(\theta)} \quad (2)$$

где  $E_1(\theta)$  — модуль упругости материала арматуры.

Как известно [6], усилия связаны с напряжениями следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_{1ij} \Delta - \int_0^{h(x, y, t)} \sigma_{2ij}(t) dz &= 0; \\ \sigma_{1ij} \Delta [H - h(x, y, t)] + \int_0^{h(x, y, t)} \sigma_{2ij}(t) z dz &= M_{ij}(x, y), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $H$  — толщина плиты,  $\Delta$  — толщина арматуры,  $h(x, y, t)$  — положение нейтрального слоя плиты (рис. 1).

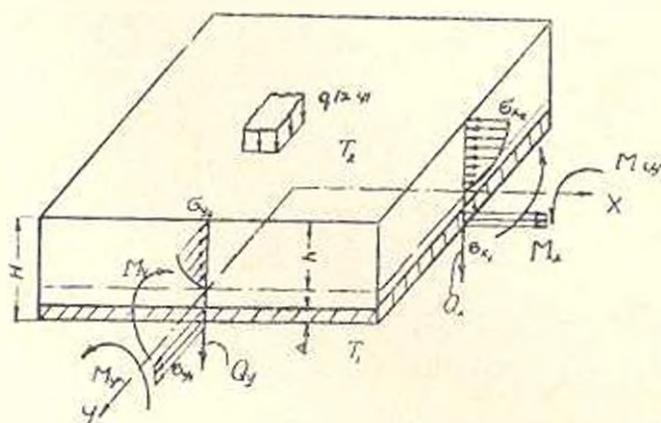


Рис. 1

Решая уравнения (1) и (2) относительно  $\sigma_{ij}$  и принимая гипотезу прямых нормалей, для бетона и арматуры соответственно получаем следующие зависимости между напряжениями и кривизнами:

$$\begin{aligned} \sigma_{2ij}(t) &= \frac{E_2(\theta)}{1-\nu} \left\{ [(1-\nu)\kappa_{ij}(t) + \nu\lambda(t)\delta_{ij} - (1+\nu)\alpha_1\Theta_1\delta_{ij}] + \right. \\ &+ \left. \int_{-1}^t [(1-\nu)\kappa_{ij}(\tau) + \nu\lambda(\tau)\delta_{ij} - (1+\nu)\alpha_1\Theta_1\delta_{ij}] R(\theta, t, \tau) d\tau \right\} z; \\ \sigma_{1ij}(t) &= [E_1(\theta)\kappa_{ij}(t) - \alpha_1\Theta_1\delta_{ij}] [H - h(x, y, t)]^{1+m}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $R(\theta, t, \tau) = -A_0^* \exp(\delta_1 \theta) \exp\{-[A_0^* \exp(\delta_1 \theta) + \gamma_{11}]|t - \tau|\}$

— резольвента ядра  $k[\theta, t, \tau]$ ;  $A_0^* = P_0 E_1 \delta_1 \gamma_{11}$ ;  $E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2$ .

После некоторых преобразований, из (3) и (4) получаем следующее интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$\frac{(1-\nu)^2 M_{ij}(x, y)}{\int_{h(x, y, t)} E_2(\theta) |H - h(x, y, t) + z| z dz} = [(1-\nu)z_{ij}(t)\delta_{ij} - (1+\nu)z_1\Theta_1\delta_{ij} + \nu z(t)\delta_{ij}] +$$

$$+ \int_0^t [(1-\nu)z_{ij}(\tau) + \nu z(\tau)\delta_{ij} - (1+\nu)z_1\Theta_1\delta_{ij}] K_1[\theta_1, t, \tau] d\tau,$$

где

$$K_1[\theta, t, \tau] = \frac{\int_{h(x, y, t)} E_2(\theta) |H - h(x, y, \tau) + z| R[\theta, t, \tau] z dz}{\int_{h(x, y, t)} E_2(\theta) |H - h(x, y, t) + z| z dz}$$

--ядро уравнения;

$$\Theta_1 = \int_0^1 \Theta(z) dz; \quad z(t) = \sum z_{ij}(t)\delta_{ij}.$$

Решая (5), получим:

$$(1-\nu)z_{ij}(t) + \nu z(t)\delta_{ij} - (1+\nu)z_1\Theta_1\delta_{ij} = \frac{M_{ij}(x, y)}{D[\theta_1, h(x, y, t)]}. \quad (6)$$

Здесь

$$D[\theta_1, h(x, y, t)] = \frac{1}{1-\nu^2} \left[ \frac{1}{\int_{h(x, y, t)} E_2(\theta) |H - h(x, y, t) + z| z dz} + \right.$$

$$\left. + \int_0^t \frac{R_1[\theta_1, t, \tau] dt}{\int_{h(x, y, t)} E_2(\theta) |H - h(x, y, t) + z| z dz} \right]^{-1}$$

-- жесткости плиты;

$R_1[\theta_1, t, \tau] = \Lambda \exp[-u(t-\tau)]$  -- резольвента ядра  $K_1[\theta, t, \tau]$ ,

где  $A, A_1, B_0, \gamma_0, b, a, c, \varphi(x, y, t), a_1, c_1, \bar{a}_1, T_0, u$  -- параметры, характеризующие деформационные свойства бетона при высоких температурах, и определяются по следующим выражениям:

$$\Lambda = \frac{A_1[a(\gamma_1 + \gamma_0 - u)^2 + b(\gamma_1 + \gamma_0 - u)] + 2c}{3(\gamma_1 + \gamma_0 - u)^2 - 2A_1a(\gamma_1 + \gamma_0 - u) + A_1b}; \quad A_1 = \frac{H^3 A_0^2 E_2}{B_0}.$$

$$B_0 = \int_0^{\frac{h(x, y, t)}{\delta}} E_2(\theta) [H - h(x, y, t) + z] z dz; \quad \gamma_0 = A_0^* \exp \{ (a_1 + c_1 \varphi(x, y, t)) \delta_1 \};$$

$$b = \left[ (1 - \varphi(x, y, t)) \delta_1 c_1 \frac{\varphi^2(x, y, t)}{3} + \frac{\delta_1 c_1 \varphi^4(x, y, t)}{4} \right] \gamma_0;$$

$$a = \frac{\varphi^2(x, y, t)}{6} [3 - \varphi(x, y, t)];$$

$$c = \left[ \delta_1^2 c_1^2 [1 - \varphi(x, y, t)] \frac{\varphi(x, y, t)}{8} + \frac{\delta_1^2 c_1^2 \varphi(x, y, t)}{10} \right] \gamma_0; \quad \varphi(x, y, t) = \frac{h(x, y, t)}{H};$$

$$a_1 = \frac{T_2}{T_0} = 1; \quad c_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_0} = 4; \quad \delta_1 = l_1 - l_2; \quad T_0 = 100.$$

Значения  $\mu$  в зависимости от коэффициента армирования ( $s$ ) приведены в табл. 1.

Таблица 1

$s$	0.10	0.05	0.025	0.0143	0.010	0.007
$\mu, 1/\text{день}$	0.0191	0.0196	0.0200	0.0210	0.0215	0.0219

Приведем дифференциальное уравнение равновесия [6]:

$$M_{,ii} + M_{,jj} - 2M_{,ijj} = -q(x, y). \quad (7)$$

Учитывая, что для тонких плит можно пренебречь влиянием перерезывающих сил и сжимающего напряжения  $\sigma_z$  на изгиб, можем воспользоваться основными соотношениями, выведенными для чистого изгиба. Следовательно, выражая кривизну плиты через прогиб

$$\frac{1}{\rho_{ij}} = W_{,ij} \quad (8)$$

и используя соотношения (6)–(8), получаем дифференциальное уравнение в частных производных с переменными коэффициентами относительно  $W$ :

$$\begin{aligned} \nabla \nabla W + \frac{D_x}{D} L_1(W, \Theta) + \frac{D_y}{D} L_2(W) + \frac{D_z}{D} L_3(W, \Theta) + \frac{D_{\theta\theta}}{D} L_4(W) + \\ + \frac{D_{\theta\theta}}{D} L_5(W) + \left( \frac{D_{\theta\theta} + D_{\theta\theta}}{D} \right) \alpha_1 \Theta + 2\alpha_1 \nabla \Theta = - \frac{q(x, y)}{D}. \end{aligned} \quad (9)$$

В прямоугольной системе координат

$$L_1(W, \Theta) = 2[\nabla W_{,i} + \alpha_1 \Theta_{,i}]; \quad L_4(W) = W_{,ij} + \nu W_{,ii};$$

$$L_1(W) = W_{,ii} + \nu W_{,jj}; \quad L_2(W) = (1 - \nu) W_{,ij};$$

$$L_3(W, \Theta) = 2[\nabla W_{,j} + \alpha_1 \Theta_{,j}]. \quad (10)$$

В полярной системе координат

$$L_1(W, \Theta) = 2(\nabla W_{,j} + \alpha_1 \Theta_{,j}); \quad L_2(W) = \frac{1}{r} W_{,j} + \frac{1}{r^2} W_{,jj} + \nu W_{,ii};$$

$$L_2(W) = W_{,jj} + \nu \left( \frac{1}{r} W_{,ii} + \frac{1}{r^2} W_{,jj} \right);$$

$$L_3(W, \Theta) = \frac{2}{r} (\nabla W_{,j} + \alpha_1 \Theta_{,j}); \quad L_3(W) = (1 - \nu) \left( \frac{1}{r} W_{,j} - \frac{1}{r^2} W_{,j} \right). \quad (11)$$

Используя уравнения (3), (4) и (8), для предельных моментов времени, когда  $t \rightarrow \infty$ , получаем нелинейное интегро-дифференциальное уравнение относительно  $h^*(x, y)$ :

$$[E_1(\theta) [W_{,ii}^* - \alpha_1 \Theta_{,i} \delta_{ij}] |H - h^*(x, y)|^{1+m} s - \frac{1}{H(1-\nu)} [W_{,ii}^* + \nu W_{,jj}^* -$$

$$- (1 + \nu) \alpha_1 \Theta_{,i} \delta_{ij}] \int_0^{h^*(x, y)} E_2(\theta) [1 + R^*] z dz = 0, \quad (12)$$

где

$$s = \Delta/H; \quad R^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t R(\theta, t, z) dz; \quad W^* = W(x, y, \infty); \quad h^*(x, y) = h(x, y, \infty).$$

Таким образом, при  $t \rightarrow \infty$  решение задачи приводится к решению системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (9) и (12).

*Чистый изгиб железобетонной плиты.* Рассмотрим случай, когда  $W_{,ii}^* = W_{,jj}^* = x^*$ . В случае чистого изгиба для определения расположения нейтральной поверхности, напряжений в бетоне и арматуре из (4) и (12) получим:

$$s [E_1(\theta) [x^* - \alpha_1 \Theta_{,i} \delta_{ij}] |H - h^*|^{1+m} -$$

$$- \frac{1}{H(1-\nu)} \left[ |x^* - \alpha_1 \Theta_{,i} \delta_{ij}| \int_0^{h^*} E_2(\theta) (1 + R^*) z dz \right] = 0;$$

$$\sigma_i^* = \left[ \frac{(1-\nu) M E_1(\theta) [1 + R_i^*] |H - h^*|^{1+m}}{\int_0^{h^*} E_2(\theta) [H - h^* + z] z dz} \right]^{1/m};$$

$$\varepsilon_2^* = \frac{ME_2(\theta) |1 + R_1^*| |1 + R^*| z}{(1 + \nu) \int_0^{h^*} E_2(\theta) |H - h^* + z| z dz}$$

где  $\varepsilon_1^* = \varepsilon_1(\infty)$ ;  $\varepsilon_2^* = \varepsilon_2(\infty)$ ;  $R_1^* = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t R_1(\theta_1, t, z) dz$ ;  $h^* = h(\infty)$ .

Нами задача решена при всех значениях коэффициента армирования ( $\nu$ ), приведенных в табл. 1 и  $m = 1; 2$  для четырех случаев.

I. Температурное поле отсутствует, ползучесть бетона не учитывается. Тогда:

$$\int_0^{h^*} E_2(\theta) |H - h^* + z| z dz = \frac{H^3 E_2}{6} \varphi_0^2 (3 - \varphi_0);$$

$$E_1(\theta) = E_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \quad E_2(\theta) = E_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ кг/см}^2;$$

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_1; \quad \varepsilon_2^* = \varepsilon_2; \quad \varphi_0 = h_0/H; \quad h_0 = h(\tau_1); \quad \varphi^* = \varphi_0.$$

II. Температурное поле отсутствует, учитывается ползучесть бетона. Тогда:

$$R^* = R_0 = -\frac{A_0}{A_0 + \gamma_1}; \quad R_1^* = R_2^* = \frac{A_0}{\gamma_1}; \quad \varepsilon_1^* = \varepsilon_1^{\text{II}}; \quad \varepsilon_2^* = \varepsilon_2^{\text{II}};$$

$$\varphi^* = \varphi_0^* = \frac{h_0^*}{H}; \quad h_0^* = h(\infty); \quad A_0 = E_2 c_0 \gamma_1; \quad c_0 = 0,9 \cdot 10^{-5} \text{ см}^2/\text{кг}.$$

III. Действует высокое стационарное температурное поле, ползучесть бетона не учитывается. Тогда:

$$E_1(\theta) = E_1 = 1,8 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2; \quad E_2(\theta) = E_2 \exp(-\theta \theta);$$

$$\int_0^{h^*} E_2(\theta) |H - h^* + z| z dz = \frac{H^3 E_2 [(1,4 - 0,24 \varphi_1) - (1,4 + 0,6 \varphi_1) \exp(-\lambda_1 \varphi_1)]}{\lambda_1^3 c_1^3 \exp(a_1 \lambda)}$$

$$\int_0^{h^*} E_2(\theta) z dz = 478172 H^2 [\exp(-0,6 \varphi_1) - (1 - 0,6 \varphi_1)];$$

$$\varepsilon_1^* = \varepsilon_1^{\text{III}}; \quad \varepsilon_2^* = \varepsilon_2^{\text{III}}; \quad \varphi^* = \varphi_1 = h_1/H; \quad h_1 = h(\theta, \tau_1).$$

IV. Действует высокое стационарное температурное поле в условиях неоднородной ползучести бетона. Тогда:

$$R^* = R_2^* = -\frac{A_0^* \exp(\lambda_1 H)}{A_0^* \exp(\lambda_1 H) + \gamma_1}; \quad R_1^* = R_1^* = \frac{A}{u};$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} E_2(\theta) \int_0^t R(\theta, t, z) dz \Big| z dz = \frac{E_2 \Lambda_2^2 H^2}{0,035185} |\varphi_1^*| \ln 0,10246 -$$

$$- \ln (0,10246 + 0,035188 \varphi_1^*) + 28,4188 [0,10246 \ln (0,10246) -$$

$$- 0,10246 \ln (0,10246 + 0,035188 \varphi_1^*) + 0,035188 \varphi_1^*];$$

$$\sigma_1^* = \sigma_1^{IV}; \quad \sigma_2^* = \sigma_2^{IV}; \quad \varphi_1^* = \varphi^* = h_1^* H; \quad h_1^* = h(\theta, \infty).$$

Результаты расчетов приведены на рисунках 2, 3 и 4 в виде графиков; верхние индексы I, II, III и IV соответствуют рассмотренным случаям. Как видно из этих графиков, нейтральный слой плиты со временем перемещается вниз. Величина перемещения увеличивается с умень-

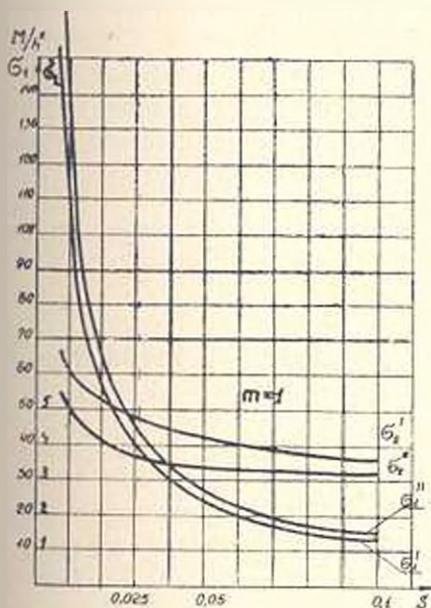


Рис. 2

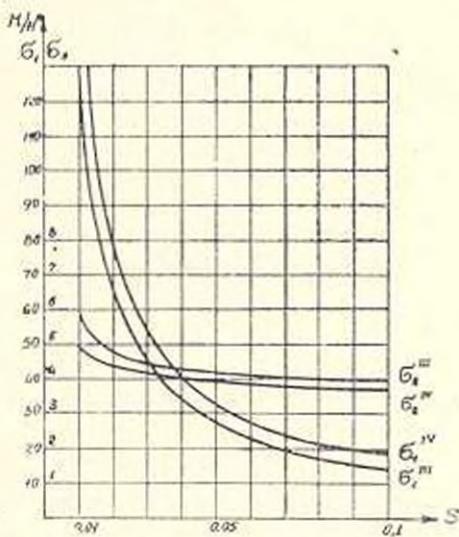


Рис. 3

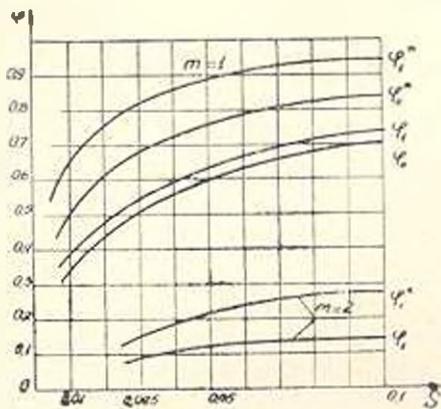


Рис. 4

шением коэффициента армирования, а при действии высокого температурного поля перемещение нейтрального слоя происходит более интенсивно. При высоких температурных полях, когда  $m = 1$ , применение железобетонных плит с коэффициентом армирования  $s > 0,1$  не целесообразно, так как при этом нейтральный слой опускается ниже бетонной части плиты. Когда  $m = 2$  толщина сжатой зоны бетона резко уменьшается, соответственно уменьшается несущая способность плиты, и, поэтому, применение железобетонных плит при высоких температурах с коэффициентом армирования  $s < 0,025$  нецелесообразно.

Характер распределения напряжений в бетоне при высоких температурах качественно отличается от картины распределения напряжений для тех случаев, когда механические свойства материалов не зависят от температуры. Как видно из рис. 3, максимальные нормальные напряжения в бетоне со временем уменьшаются, а в арматуре — увеличиваются; перераспределение напряжений увеличивается с уменьшением коэффициента армирования, а при действии высокого температурного поля перераспределение напряжений происходит более интенсивно.

ЕрПН им. К. Маркса

Поступило 17.IV.1971

Ռ. Ա. ՄՈՒՆՅԱՆ

## ԵՐԿԱՔԵՏՈՆԻ ՍԱՐԻ ՇԵՄԻՈՂ ՐԱՐՁՐ ԶԵՐՄԱՅԻՆ ԳՈՇՏՈՒՄ

### Ա մ փ ո ղ ո ս մ

Հոդվածում քննարկվում է երկաթբետոնե սալի ծածան խնդիրը ստացիոնար բարձր ջերմային դաշտում, երբ բետոնի և երկաթի առաձգական հաստատունները և բետոնի սողրի չափը կախված են ջերմաստիճանից: Խնդրի լուծումը բերվում է ոչ-զծային ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների սխեմայի: Բրպես օրինակ ուսումնասիրված է երկաթբետոնե սալի մարտր ծածան խնդիրը չորս տարրեր դեպքերի համար:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Арутюнян Н. А. Некоторые задачи теории ползучести. Гостехиздат, М.—Л., 1952.
2. Учанян Р. А. Теория и расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом длительных процессов. Киев, 1967.
3. Бондиренко В. М. Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Харьков, 1968.
4. Говидеа А. А. и Крылов С. М. Особенности деформации бетона и железобетона и использование ЭВМ для оценки их влияния на поведение конструкций, М., 1969.
5. Гольденблат И. И. и др. Расчет конструкций на тепловые воздействия. М., 1969.
6. Тимошенко С. П. Пластинки и оболочки. М., 1963.
7. Мурадян Л. М., Задоян М. А. «Известия АН АрмССР (серия техн. наук)», № 4, 1971.
8. Мурадян Л. М. «ДАН АрмССР», том LIV, № 1, 1972.
9. Задоян М. А. «Известия АН СССР, ОТИ, механика и машиностроение», № 4, 1961.