ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXVII, № 5, 1974 Серия технических наук

РАДИОТЕХНИКА

Э. С. БУРУНСУЗЯН, С. А. АКОПЯН, О. В. ЛЕОНОВ

# К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ПРЕОБРАЗОВАННЫХ ЗНАКОВЫХ ПРОЦЕССОВ

В работе [1] найдена зависимость коэффициента корреляции знаков смеси гармонического сигнала с гауссовым шумом и опорного сигнала частоты гармонической составляющей от отношения сигнала/шум смеси и фазы сигнала. Коэффициент корреляции знаков определяется как статистическое среднее случайной величины, представляющей из себя коэффициент корреляции знаков указанных процессов, измеренный на одном периоде опорного сигнала.

При измерении коэффициента корреляции знаков по временным реализациям (указанные процессы обладают свойством эргодичности) $z$ будет некоторым случайным процессом.

Представляет интерес определить корреляционную функцию и коэффициент корреляции процесса, чтобы использовать их в дальнейшем для оценки точности определения коэффициента корреляции знаков при измерении последнего по реализациям конечной длины. Разброс в значениях измеренного коэффициента корреляции знаков, если измерения ведутся по реализациям одинаковой конечной длины, возрастет при уменьшении отношения сигнал/шум и максимален, когда в смеси полностью отсутствует сигнал.

Поэтому корреляционная функция процесса $z$ будет определена в предположении, что смесь является чистым гауссовым шумом. Известно, что корреляционную функцию процесса можно определить, зная двумерную функцию распределения вероятностей [2]

$$B_z(\tau) = \int\int_{(A_2)} z_1 z_2 W_2(z_1, z_2, \tau) dz_1 dz_2, \tag{1}$$

где $B_z(\tau)$ — корреляционная функция процесса $z$;

$W_2(z_1, z_2, \tau)$ — двумерная функция распределения процесса $z$;

$A_2$ — область изменения значений $z$.

Для определения $W_2(z_1, z_2, \tau)$ используем формулы преобразования плотностей вероятностей функционально связанных случайных величин.

Двумерная функция распределения фазы стационарного случайного процесса в отсутствии сигнала имеет следующий вид [2]:

$$W_2(\varphi_1, \varphi_2, \tau) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r e^{ir(\varphi_1-\varphi_2)}, \tag{2}$$

$$|\varphi_1| \leqslant \pi \quad |\varphi_2| \leqslant \pi$$

где $$A_r(\tau) = \frac{1-R_0^2}{4\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(n+1+r/2)}{n!(n+r)!} R_0^{r+2n};$$

$\Gamma(x)$ – гамма-функция; $R_0^2(\tau) = R_c^2(\tau) + R_s^2(\tau)$; $R_c(\tau)$ и $R_s(\tau)$ – коэффициенты корреляции.

При представлении стационарного нормального случайного процесса в виде суммы косинусной и синусной составляющих с частотой, равной резонансной частоте системы, $R_c(\tau)$ есть коэффициент корреляции, общий для амплитуд косинусной и синусной составляющих, а $R_s(\tau)$ — коэффициент взаимной корреляции амплитуд косинусной и синусной составляющих [2]. Связи их с энергетическим спектром системы выглядят так:

$$R_c(\tau) = \frac{\int_0^\infty F(\omega)\cos(\omega-\omega_0)\tau d\omega}{\int_0^\infty F(\omega)d\omega}; \qquad R_s(\tau) = \frac{\int_0^\infty F(\omega)\sin(\omega-\omega_0)\tau d\omega}{\int_0^\infty F(\omega)d\omega},$$

где $F(\omega)$ – энергетический спектр системы.

Зависимость $z=f(\varphi)$, полученная в [1], в случае приема только шума не зависит от фазы опорного сигнала и имеет вид: $z = 1 - \frac{2}{\pi}|\varphi|$.

Тогда $z_1 = 1 - \frac{2}{\pi}|\varphi_1|$; $\quad z_2 = 1 - \frac{2}{\pi}|\varphi_2|$.

В силу того, что обратные функции $\varphi_1 = f(z_1)$ и $\varphi_2 = f(z_2)$ неоднозначны и имеют по две ветви, двумерная функция распределения процесса $z$ определяется по формуле [2]:

$$W_2(z_1, z_2, \tau) = \sum_{k=1,2} W_2(\varphi_{1k}\varphi_{2k}) \frac{\partial(\varphi_{1k}\varphi_{2k})}{\partial(z_1 z_2)},$$

где

$$\frac{\partial(\varphi_{1k}\varphi_{2k})}{\partial(z_1 z_2)} = \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial z_2} - \frac{\partial\varphi_{2k}}{\partial z_1} \cdot \frac{\partial\varphi_{1k}}{\partial z_2}.$$

Уравнения для ветвей имеют следующий вид:

$$\varphi_{11} = \frac{\pi}{2}(1-z_1); \qquad \varphi_{12} = -\frac{\pi}{2}(1-z_1);$$

$$\varphi_{21} = \frac{\pi}{2}(1-z_2); \qquad \varphi_{22} = -\frac{\pi}{2}(1-z_2).$$

Тогда

$$\frac{\partial(\varphi_{1k}\varphi_{2k})}{\partial(z_1 z_2)} = \frac{d\varphi_{1k}}{dz_1} \cdot \frac{d\varphi_{2k}}{dz_2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

С использованием полученного, выражение двумерной функции распределения процесса $z$ будет иметь вид:

$$W_2(z_1, z_2, \tau) = \frac{\pi^2}{4} \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r \left\{ \exp\left[ ir\frac{\pi}{2}(z_2 - z_1) \right] + \exp\left[ -ir\frac{\pi}{2}(z_2 - z_1) \right] + \right.$$

$$\left. + \exp\left[ ir\pi - ir\frac{\pi}{2}(z_2 + z_1) \right] + \exp\left[ -ir\pi + ir\frac{\pi}{2}(z_2 + z_1) \right] \right\}. \qquad (3)$$

Использовав известное соотношение $e^{\pm ix} = \cos x \pm i\sin x$, можно получить другую запись выражения функции распределения:

$$W_2(z_1, z_2, \tau) = \frac{\pi^2}{2} \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r \left[ \cos r\frac{\pi}{2}(z_2 - z_1) + (-1)^r \cos r\frac{\pi}{2}(z_2 + z_1) \right]. \qquad (4)$$

Для вычисления корреляционной функции, согласно выражению (1), удобно пользоваться записью (4).

Переменные двойных интегралов в этом случае легко разделяются, и каждый из них, представляющий из себя интеграл вида $\int_a^b x e^{ax} dx$, легко вычисляется. Вычисляя соответствующие интегралы, получим корреляционную функцию процесса $z$:

$$B_z(\tau) = \frac{64}{\pi^4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{A_{2m-1}}{(2m-1)^4}.$$

Для функции $A_{2m-1}$ имеет место: $A_{2m-1} = A_{-(2m-1)}$.
Использовав это, будем иметь:

$$B_z(\tau) = \frac{128}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{2m-1}}{(2m-1)^4}.$$

Коэффициент корреляции есть нормированная корреляционная функция

$$K_z(\tau) = \frac{B_z(\tau) - \overline{z}^2}{\sigma_z^2}.$$

В случае приема только шума $\overline{z} = 0$.
Дисперсия $\sigma_z^2$ равна значению корреляционной функции в точке ноль [3].

При $\tau \to 0$ $A_{2m-1}(\tau) \to \frac{1}{4\pi^2}$ и, следовательно,

$$\sigma_z^2 = B_z(0) = \frac{32}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^4} = \frac{32}{\pi^4} \cdot \frac{\pi^4}{96} = \frac{1}{3}.$$

Использовав полученное, для коэффициента корреляции будем иметь следующее выражение:

$$K_z(\tau) = 3B_z(\tau) = \frac{384}{\pi^4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_{2m-1}}{(2m-1)^4}.$$

Раскрывая значение функции $A_{2m-1}$, выразив одновременно гамма-функцию через факториалы [4], получим:

$$B_2(\tau)=\frac{32}{\pi^2}(1-R_0^2)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[[2(n+m)-1]!!]^2}{2^{2(n+m)}n!(2m+n-1)!(2m-1)^2}R_0^{2(n+m)-1}.$$

Двойные суммы в выражении для $B_2(\tau)$ можно записать по степеням $R_0$ и получить:

$$B_2(\tau)=\frac{32}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}a_k R_0^{2k-1}.$$

Если обозначить

$$\frac{[[2(n+m)-1]!!]^2}{2^{2(n+m)}n!(2m+n-1)(2m-1)^2}=f(n,m),$$

то для коэффициентов $a_k$ будем иметь:

$$a_k=f(n=0,\ m=k)+f(n=1,\ m=k-1)+\ldots+f(n=k-1,\ m=1)-$$
$$-f(n=0,\ m=k-1)-f(n=1,\ m=k-2)-\ldots-f(n=k-2,\ m=1).$$

На ЭВМ вычислены значения десяти коэффициентов $a_k$, которые приведены в табл. 1.

*Таблица 1*

| $k$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a_k$ | $25\cdot10^{-2}$ | $3241\cdot10^{-5}$ | $1242\cdot10^{-6}$ | $6563\cdot10^{-6}$ | $4064\cdot10^{-6}$ | $2767\cdot10^{-6}$ | $2006\cdot10^{-6}$ | $1523\cdot10^{-6}$ | $1195\cdot10^{-6}$ | $9636\cdot10^{-7}$ |

Для практических расчетов эти десять коэффициентов ряда оказываются вполне достаточными. Действительно, скорость сходимости ряда $B_2(\tau)$ ($K_2(\tau)$) зависит от величины $R_0$ и минимальна при $R_0=1$ (что соответствует $\tau=0$). Коэффициент корреляции для нулевого временного сдвига также должен быть равен единице, $K_2(0)=1$. Сумма десяти членов ряда, по которому определяется $K_2$, при $R_0=1$ дает величину $K_2(0)=0{,}973$.

Следовательно, максимально возможная погрешность при определении $K_2$ по ограниченному десятью членами ряду не превышает 2,7 %.

ЕрПИ им. К. Маркса

Поступило 20.VI 1974

Է. Ս. ԲՈՒՐՈՒՆՍՈՒԶՅԱՆ, Ս. Ա. ՀԱԿՈԲՅԱՆ, Օ. Վ. ԼԵՈՆՈՎ

## ՎԵՐԱՓՈԽՎԱԾ ՆՇԱՆԱՅԻՆ ՊՐՈՑԵՍՆԵՐԻ ԿՈՌԵԼՅԱՑԻՈՆ ՖՈՒՆԿՑԻԱՅԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ


### Ամփոփում

*Հոդվածում ստացված են կոռելյացիոն ֆունկցիան և կոռելյացիայի գործակիցը այնպիսի պատահական պրոցեսի համար, որի մաթեմատիկական սպասումը իրենից ներկայացնում է նեղ շերտային գաուսյան աղմուկի և հենակային ազդանշանի կոռելյացիայի գործակիցը. ընդ որում՝ հենակային ազդանշանի հաճախությունը համընկնում է աղմուկի էներգետիկ սպեկտրի կենտրոնական հաճախության հետ։ Կոռելյացիոն ֆունկցիան ստացված է անվերջ շարքի տեսքով, որի տասը գործակիցները հաշված են ԷԹՀՄ միջոցով և լիովին բավարար են գործնական հաշվարկների համար։*


### ЛИТЕРАТУРА


1. *Бурунсузян Э. С., Леонов О. В.* Об одном методе определения отношения сигнал/шум. «Радиотехника и электроника», вып. 15, № 11, 1970.
2. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Изд. «Советское радио», т. 1, 1966.
3. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций. Физматгиз, М., 1962.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.