

ГИДРАВЛИКА

А. Б. БАГДАСАРЯН

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОДЫ В НАПОРНЫХ ТРУБОПРОВОДАХ С ВОЗДУШНЫМИ ПОЛОСТЯМИ

При заполнении водой трубопроводов насосных станций и дюкеров известны многочисленные случаи аварий [1], причиной которых являлись воздушные полости, образующиеся и движущиеся по мере воды. В настоящей статье рассматриваются некоторые задачи нестационарного движения воды с воздушными полостями в трубопроводах насосных станций.

1. Пусть трубопровод до включения насоса заполнен водой на участке  $DEF$  (рис. 1, а). В момент  $t=0$  начинают работать насосы, и трубопровод с некоторой скоростью  $v$ , зависящей от напора  $H$ , заполняется водой (участок  $AB$ ). Объем воздуха на участке  $BD$  будет сжиматься, и давление превысит атмосферное давление  $P_0$ . Объем воды  $DEF$  будет перемещаться вперед по некоторому закону и займет объем  $D'E'F'$ . Обозначим начальную длину участка  $AD$  через  $s_0$ , длину

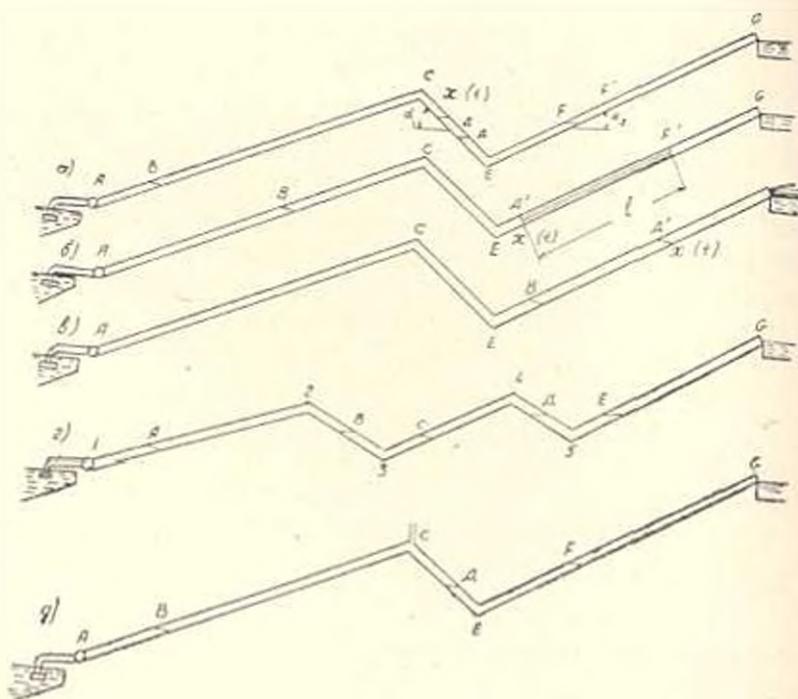


Рис. 1

участка воды  $DEE'$ —через  $l$ , участок  $DE$ —через  $a$ , общую длину трубопровода  $ACEG$ —через  $L$ .

Для математического описания движения предположим, что:

1. Воздушная полость заполняет всё сечение трубопровода и имеет цилиндрическую форму с основанием, нормальным к оси трубопровода.

2. Сжатие и расширение воздушной полости подчиняется изотермическому закону.

3. По длине трубопровода его сечение не изменяется.

Скорость наполнения трубопровода во времени  $v(t)$  можно определить из универсальных характеристик насоса и из профиля укладки трубопровода.

Выбирая начало координат в начале трубопровода [в точке  $A$  (рис. 1)] и обозначая расстояние до поверхности  $D'$  через  $x(t)$ , уравнение движения свободной поверхности  $x(t)$  запишется в виде

$$\ddot{x}(t) = \frac{P_0}{\rho l} \left[ \frac{S_0}{x(t) - \int_0^t v(t) dt} - 1 \right] - \frac{g}{l} \int_{x(t)}^{x(t)+l} \sin \alpha(z) dz - \frac{\lambda}{2D} \dot{x}^2(t), \quad (1.1)$$

где  $\rho$ —плотность воды;  $D$ —диаметр трубопровода;  $\lambda$ —коэффициент гидравлического трения;  $g$ —ускорение силы тяжести;  $\alpha(z)$ —угол наклона трубопровода на участке  $x(t) \leq z \leq x(t)+l$ .

Начальными условиями являются:  $x(0) = s_0$ ;  $\dot{x}(0) = 0$ .

Для случая, приведенного на рис. 1, движение можно представить тремя этапами:

1. С начального момента  $t=0$  до момента  $t=t_1$ , когда поверхность  $x(t)$  доходит до точки  $E$ .

2. С момента  $t=t_1$  до момента  $t=t_2$ , когда поверхность доходит до концевой точки трубопровода  $G$ .

3. С момента  $t=t_2$  до полного истечения воды из трубопровода.

Ниже приводим уравнения движения для отдельных этапов и приближенные решения для первого и второго этапов.

*Первый этап.* Уравнение движения (1.1) на первом этапе, когда скорость наполнения  $v = v_0$  постоянна, запишется в виде:

$$\ddot{x}(t) = \frac{P_0}{\rho l} \frac{s_0 - x(t)}{x(t) - v_0 t} - \frac{ng}{l} [x(t) - s_0] - \frac{\lambda}{2D} \dot{x}^2(t), \quad (1.2)$$

где  $n = \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2$ ;  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ —углы наклона участков трубопровода  $CE$  и  $EG$ , соответственно.

Переходя к безразмерным переменным:

$$u = \frac{x}{s_0}; \quad \tau = \sqrt{\frac{P_0}{2lS_0}} t, \quad (1.3)$$

после некоторых преобразований уравнение (1.2) запишется в виде

$$(\ddot{u} + n_2 \dot{u}^2)(u - \mu \tau) + m_1 u^2 + (m_1 \mu \tau - m_1 + 1)u - 1 - \mu \tau(m_1 - 1), \quad (1.4)$$

$$\text{где } \nu = \frac{v_0}{s_0} \sqrt{\frac{\rho l s_0}{P_0}}; \quad m_1 = \frac{n \rho g s_0}{P_0}; \quad n_1 = \frac{\lambda s_0}{2D}.$$

Уравнение (1.4) с начальными условиями  $u(0)=1$ ,  $u'(0)=0$  интегрируется до момента  $\tau=\tau_1$ , т. е. в интервале  $1 \leq u(\tau) \leq 1+a/s_0$ .

Принебрегая гидравлическими потерями, для уравнения (1.2) можно построить асимптотические решения для малых и больших промежутков времени.

Для начальных моментов времени, предполагая  $\frac{x-s_0}{s_0} \ll 1$ , решение получается в виде:

$$x(t) = s_0 + \frac{P_0 s_0^2}{\rho l v_0^2} \left[ 1 - \left(1 - \frac{v_0 t}{s_0}\right) \left| 1 - \ln \left(1 - \frac{v_0 t}{s_0}\right) \right| \right] - \frac{P_0}{2\rho l} t^2. \quad (1.5)$$

Для поздних моментов времени асимптотика строится с учетом того, что в этих моментах длина воздушной полости  $z(t) = x(t) - v_0 t$  колеблется около своего асимптотического значения

$$z_0 = \frac{P_0 s_0}{P_0 + \rho g l \sin \alpha_2}. \quad (1.6)$$

Уравнение, описывающее изменение длины воздушной полости, запишется в виде:

$$\rho l z \ddot{z} + n \rho g z^2 + \left[ P_0 + n \rho g (v_0 t - s_0) \right] \dot{z} = P_0 s_0. \quad (1.7)$$

Переходя к безразмерным переменным:

$$U = \frac{z}{z_0}; \quad \tau = \sqrt{\frac{P_0}{\rho l z_0}} t, \quad (1.8)$$

уравнение (1.7) запишется в виде:

$$z_0 U \ddot{U} + A z_0^2 U^2 + z_0 U (A \mu_1 \tau - A s_0 + 1) = s_0, \quad (1.9)$$

$$\text{где } A = \frac{\rho g n}{P_0}; \quad \mu_1 = v_0 \sqrt{\frac{\rho l z_0}{P_0}}.$$

Обозначим  $U = 1 + U_1$ , где  $U_1 \ll 1$ , и подставим в уравнение (1.9). Далее, разлагая в ряд по малому параметру  $U_1$  и оставляя только члены первой степени малости, получим уравнение в виде

$$U_1 + \omega_1^2 U_1 = A \mu_1 \tau + B, \quad (1.10)$$

$$\text{где } B = \frac{s_0}{z_0} - A(s_0 - z_0) - 1, \quad \omega_1^2 = \frac{s_0}{z_0} + A z_0.$$

Начальные условия берутся из асимптотического решения (1.5) для некоторого момента  $t = t_0$ .

Асимптотика при больших промежутках времени имеет вид

$$x(t) = v_0 t + z_0 \left| 1 + C_1 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t + \frac{A v_0 t + B}{\omega_1^2} \right|, \quad (1.11)$$

где  $\Omega = \omega_1 \sqrt{\frac{P_0}{\rho l z_0}}$ ;

$C_1$  и  $C_2$  — постоянные интегрирования.

Выражение (1.11) это закон движения воды в интервале  $t' \leq t \leq t_1$ , где  $t_1$  соответствует моменту, когда  $x(t)$  доходит до точки  $F$  (рис. 1, а).

*Второй этап.* На втором этапе столб воды движется на прямоугольном участке  $EG$  (рис. 1, б), а поверхность — в интервале  $s_0 + a \leq x(t) \leq L - l$ .

Тогда уравнение движения (1.1) запишется в виде:

$$\ddot{x}(t) = \frac{P_0}{\rho l} \left| \frac{x_2}{x(t) - v_0 t} - 1 \right| - g \sin \alpha_2. \quad (1.12)$$

Уравнение (1.12) в безразмерных координатах (1.3) примет вид

$$(\ddot{u} + \beta u^2 + m_2)(u - \beta \tau) = 1, \quad \text{где } m_2 = 1 + \frac{\rho l g}{P_0} \sin \alpha_2. \quad (1.13)$$

Начальными условиями являются;

$$u|_{\tau=\tau_2} = u_1(\tau_2); \quad \dot{u}|_{\tau=\tau_2} = \dot{u}_1(\tau_2), \quad (1.14)$$

где  $u_1(\tau_2)$ ,  $\dot{u}_1(\tau_2)$  — безразмерные значения перемещения столба воды и его скорости в первом этапе для момента  $\tau = \tau_2$ .

Решение уравнения (1.13), если пренебречь гидравлическими потерями ( $\beta = 0$ ), с помощью подстановки  $u = y + \mu$  запишется в виде квадратуры

$$\tau = \pm \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{\ln \frac{y^2}{y_1} - m_1(2y + y_1) - y_1^2}}, \quad (1.15)$$

где  $y_1 = u_1(\tau_2) - \mu$ ;  $y_2 = \dot{u}_1(\tau_2) - \mu$ .

Использовать решение в виде (1.15) не совсем удобно, поэтому построим приближенное решение уравнения (1.13). Для этого обозначим:  $x = z + v_0 t$ , далее  $z = z_0 + z_1$  (где  $z \ll z_0$ ), затем  $z_1 = z_0 U$ , и подставим в (1.13).

Разлагая в ряд по малому параметру  $U \ll 1$  и оставляя только члены первой степени малости, уравнение (1.13) приводится к виду:

$$\ddot{U} + \omega_2^2 U = A, \quad (1.16)$$

где  $\omega_2^2 = \frac{s_0 P_0}{z_0^2 \rho g}$ ;  $A = \frac{P_0}{\rho l} \left( \frac{s_0}{z_0} - 1 \right) - g \sin \alpha_2$ .

Приближенное решение (1.13) получается в виде

$$x(t) = v_0 t + z_0 \left( 1 + c_1 \cos \omega_2 t + c_2 \sin \omega_2 t + \frac{A}{\omega_2^2} \right), \quad (1.17)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий (1.14).

Выражение (1.17) дает решение до момента времени  $t = t_3$ , когда поверхность  $x(t)$  доходит до точки  $L-l$  (рис. 1.8), после чего начинается истечение из трубопровода.

*Третий этап.* Уравнение третьего этапа учитывает истечение из трубопровода и имеет вид:

$$\ddot{x}(t) = \frac{P_0}{\rho} \frac{s_0 - x(t) + v_0 t}{[L - x(t)] |x(t) - v_0 t|} - \frac{\lambda}{2D} \dot{x}^2(t) - g \sin \alpha_2. \quad (1.18)$$

Начальные условия берутся из решения второго этапа.

После полного истечения столба воды и сжатого воздуха, начинается процесс распространения волны понижения давления и происходит соударение столба воды, хлынувшей из верхнего бассейна, со столбом воды, имеющейся в трубопроводе.

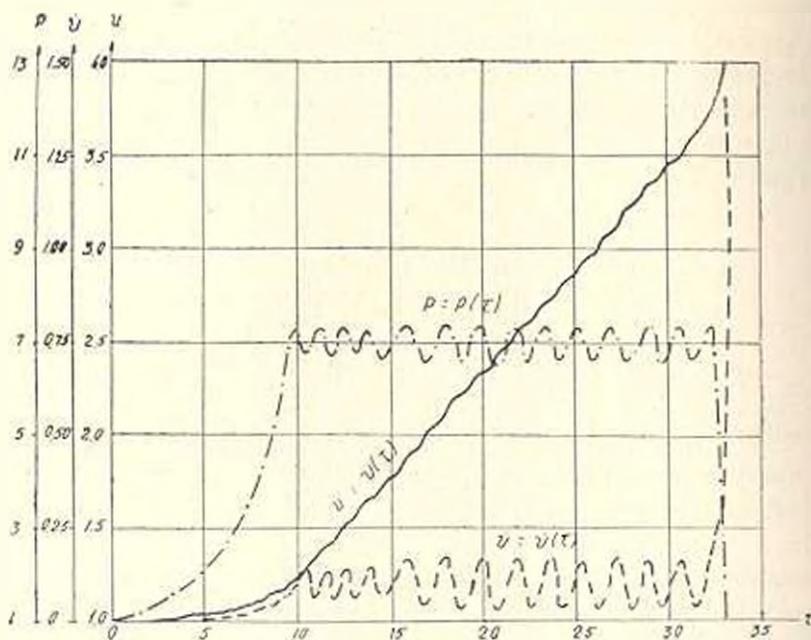


Рис. 2

По описанному выше методу на ЭВМ решена задача нестационарного движения воды\* в трубопроводе с воздушными полостями при следующих исходных данных:

$$a = 2(1) \text{ м}; \quad v = 100 \text{ м}; \quad \sin \alpha_1 = 0,1; \quad \sin \alpha_2 = 0,2; \quad s_0 = 1000 \text{ м}; \quad L = 4000 \text{ м}; \\ v_0 = 2 \text{ м/сек}; \quad D = 2 \text{ м}.$$

Результаты вычислений приведены на рис. 2, и как видно, вначале столб воды движется медленно с малой амплитудой колебаний, с течением времени скорость движения столба асимптотически стремится к значению  $v_0 = 2 \text{ м/сек}$ , колеблясь около этого значения. С началом истечения столба воды скорость увеличивается и происходит выброс воды.

2°. Пусть трубопровод до включения насосов наполнен водой на участках  $BC$  и  $DE$  (рис. 1,2).

Введем следующие обозначения. Начальную длину столба воды  $B3$  обозначим через  $a_1$ ,  $3C$  — через  $a_2$ ,  $D5$  — через  $a_3$ ,  $5E$  — через  $a_4$ , общую длину  $BC$  — через  $a_{12}$ ,  $DE$  — через  $a_{34}$ . Длину трубопровода на участке  $1-2$  обозначим через  $l_1$ , на участке  $2-3$  —  $l_2$ , на участке  $3-4$  —  $l_3$ , на участке  $4-5$  —  $l_4$ , на участке  $5-6$  —  $l_5$ . Сумму длин участков трубопровода обозначим через  $l_{mn}$ , например,  $l_{23} = l_2 + l_3$ .

Уравнение состояния в воздушных полостях  $AB$  и  $CD$ , с учетом принятого предположения об изотермическом законе сжатия и расширения, получим в виде:

$$P_1(t) = P_0 \frac{l_{12} - a_1}{x_1(t) - \int_0^t v(t) dt}; \quad P_2(t) = P_0 \frac{l_{35} - a_2 - a_3}{x_2(t) - x_1(t) - a_{12}}; \quad (2.1)$$

где  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — соответственно расстояния от начала координат (точка  $I$ , рис. 1,2) до движущихся поверхностей  $B$  и  $D$ ;  $P_1(t)$  — давление в воздушной полости  $AB$ , а  $P_0(t)$  — давление в  $CD$ .

Уравнение движения до начала истечения столба  $x_1(t)$  из трубопровода запишется в виде:

$$\ddot{x}_1 = \frac{P_1(t) - P_2(t)}{a_{12} \rho} - \frac{g}{a_{12}} \int_{x_1}^{x_1 + a_1} \sin \alpha_1(\xi) d\xi - \frac{\lambda}{2D} \dot{x}_1^2; \\ \ddot{x}_2 = \frac{P_2(t) - P_0}{a_{34} \rho} - \frac{g}{a_{34}} \int_{x_2}^{x_2 + a_4} \sin \alpha_2(\xi) d\xi - \frac{\lambda}{2D} \dot{x}_2^2.$$

Уравнение (2.2) легко записывать и для соответствующих этапов, так как отдельные участки прямолинейны и вычисление интегралов и правых частей (2.2) не затруднительно. Начальными условиями являются:

$$x_1(0) = l_{12} - a_1; \quad x_2(0) = l_{15} - a_3; \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0. \quad (2.3)$$

\* Вычисления произведены Р. М. Рафаэляном, К. С. Серосяном и В. В. Куркчяном.

При поэтапном описании начальные условия берутся из решения предыдущего этапа.

На этапе, когда начинается истечение столба  $DE$ , в системе (2.2) второе уравнение следует заменить другим, учитывающим изменение массы жидкости, аналогично уравнению (1.18).

При решении поставленной задачи о полном истечении столбов воды получаются начальные условия для решения задачи о распространении волны понижения давления и определения величины повышения давления при гидравлическом ударе.

3°. Рассмотрим случай, когда в наивысшей точке укладки трубопровода установлен вантуз для выпуска воздуха при наполнении трубопровода (рис. 1,  $\partial$ ).

В конструкциях обычных автоматических вантузов имеется противоречие между производительностью и габаритностью. Поэтому определение минимального диаметра требуемого выпускного отверстия вантуза, который может полностью выпускать воздух при нестационарной работе, является одним из важных вопросов при проектировании трубопроводов в пересеченных местностях. Для работающих трубопроводов необходимо определить максимальную скорость наполнения трубопровода при заданном диаметре выпускного отверстия вантуза.

К предположениям, сделанным в п. 1, здесь добавляется то, что сжатие воздуха в воздушной полости подчиняется изотермическому закону, а выходящий воздух расширяется по адиабатическому закону. Обозначим давление, плотность, температуру и массу воздуха в момент  $t=0$  соответственно через  $P_0, \rho_0, T_0, m_0$ , а в некоторый момент времени после включения насоса — через  $P(t), \rho(t), T(t), m(t)$ .

Плотность воздуха в воздушной полости  $ВД$  (рис. 1,  $\partial$ ) в любой момент времени можно определить, как

$$\rho(t) = \frac{m_0 - m_1(t)}{V(t)}. \quad (3.1)$$

Здесь  $V(t)$  — объем воздушной полости;  $m_1(t)$  — масса выходящего воздуха за  $t$ , определяемая формулой

$$m_1(t) = \frac{\pi d^2}{4} \int_0^t \omega(t) \rho_*(t) dt; \quad (3.2)$$

$$\rho_*(t) = \rho(t) \left[ \frac{P(t)}{P_0} \right]^{\frac{1}{\kappa}}$$

где  $d$  — диаметр выпускного отверстия вантуза;  $\rho_*(t)$  — плотность выходящего газа;  $\kappa = 1,4$  — показатель адиабаты для воздуха;  $\omega(t)$  — скорость выходящего воздуха, определяемая формулой [2]:

$$w(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2x}{x-1} \cdot \frac{P(t)}{\rho(t)}} \left| 1 - \frac{P_0}{P(t)} \right|^{\frac{x-1}{x}} & \text{если } P < 1,9 \text{ ат;} \\ \sqrt{\frac{2x}{x+1} R_p T_0} & \text{если } P \geq 1,9 \text{ ат,} \end{cases} \quad (3.3)$$

где  $P=29,27 \text{ м/град}$  — газовая постоянная.

Из формулы (3.3) видно, что если внешнее атмосферное давление становится критическим ( $P/P_0=0,528$ ) по отношению к внутреннему давлению, т. е. когда внутреннее давление становится больше  $1,9 \text{ ат}$ , то скорость истечения не зависит от повышения давления в воздушной полости и в дальнейшем постоянна. Дифференциальное уравнение, описывающее нестационарный процесс заполнения трубопровода, выпуск воздуха и движение поверхности  $D$  (рис. 1, д), сводится к следующему:

$$\dot{x} = \frac{P(t) - P_0}{\rho_1 l} - \frac{g}{l} \int_x^{x+l} \sin \alpha(\xi) d\xi - \frac{\lambda}{2D} x^2; \quad P(t) = \frac{P_0}{\rho_0} \frac{m_0 - m_1(t)}{x - v_0 t} \quad (3.4)$$

Здесь приняты прежние обозначения, только плотность воды обозначена через  $\rho_1$ , а  $l$  — длина колонны воды  $DF$ .

Уравнение (3.4) решается с учетом (3.2) и (3.3). Решение заключается в определении минимального значения выпускного отверстия  $d$ , оно находится методом последовательных приближений. Определяется минимальное значение диаметра выпускного отверстия вантуза, при котором удается полностью выпускать воздух.

ЕрПН им. К. Маркса

Поступило 3.XII.1973.

Ա. Ր. ԲԱՂՅԱՍԱՐԱՆ

ՊԵՏՅԻՆ ՊԱՐԿԵՐՈՎ ՋՐԻ ՈՋ-ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՇԱՐՔՈՒՄԸ ԵՌՂՈՎԱԿԱՇԱՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Պոմպակայանների և ղյուղերների խողովակաշարերը շրով լցնելիս հայտնի են բազմաթիվ վթարային դեպքեր, որոնք պայմանավորված են շարժվող ջրի մեջ օդային պարկերի առաջացմամբ:

Խողովակաշարերի ծայրից ջրի սյան նետումից առաջացած հիդրավիկական հարվածից ճնշման բարձրացման շափի որոշման համար անհրաժեշտ է լուծել օդային պարկերով ջրի շարժման խնդիրը:

Վանտուզների օդ բաց թողման անցքի ամենափոքր շափի որոշման համար նույնպես անհրաժեշտ է լուծել այդ խնդիրը՝ ոչ-ստացիոնար ռեժիմի դեպքում: Այդ հարցը հանդիսանում է կարևորագույն հարցերից մեկը, լեռնային տեղանքում խողովակաշարեր նախագծելիս:

Հողվածում բերված են խողովակաշարերի տարրեր տեղադրումների դեպքում այդ երևույթները նկարագրող համասարումները: Ստացված են մի շարք մոտավոր և անիմպուտիկ լուծումներ: Բերված է նաև թվային հաշվարկի օրինակ վանաուզի բացակայության դեպքում:

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бунятин Л. Б. К вопросу о причинах аварий дукеров. Труды АрмНИИГиМ, № 1, Ереван, 1952.
2. Христианович С. А., Гальперн В. Г., Миллионщикова М. Я., Смирнов Л. А. Прикладная газовая динамика. М., 1948.