ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտ. սերիա XXVII, № 1, 1974 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

М. А. ЗАДОЯН

О ПРИМЕНЕНИИ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ РАСЧЕТЕ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

В теории расчета железобетонных элементов в упругой стадии наряду с прямыми способами успешно применяются и вариационные методы, позволяющие во многих случаях находить наиболее эффективные решения задачи. В расчетах статически неопределимых железобетонных конструкций с учетом ползучести бетона эти вариационные способы пока не заняли должного места, как это имеет место в упругих расчетах.

В данной статье приводится некоторое обобщение и приложение формулы Кастильяно для железобетонной балки с учетом наследственной ползучести бетона.

Принимается, что железобетонная балка работает в стадии, когда трещины отсутствуют. Для простоты рассматриваем балку с прямоугольным поперечным сечением с двусторонним симметричным армированием.

Будем исходить из наследственной теории ползучести Маслова-Арутюняна [1] и из основных гипотез, принятых в теории расчета железобетона [1—6] и др. Между напряжением и деформацией в бетоне имеется зависимость

$$E\varepsilon(t) = \sigma(t) + \int_{\tau_0}^{t} \sigma(\tau) K(t, \tau) d\tau. \tag{1}$$

Здесь модуль мгновенной деформации бетона принимается постоянным (осредненным)

$$K(t, \tau) = -E \frac{\partial}{\partial \tau} \varphi(\tau) [1 - e^{-\gamma(t-\tau)}], \qquad \varphi(\tau) = \frac{A_1}{\tau} + C_0. \tag{2}$$

Материал арматуры считаем идеально упругим с модулем упругости E_1.

Из условий равновесия имеем (рис. 1)

$$\int_{-h}^{h} b\sigma dz + (\sigma_1 + \sigma_2) F_1 = N, \qquad \int_{-h}^{h} b\sigma z dz + (\sigma_1 - \sigma_2) F_1 h = M, \tag{3}$$

где N и M—нормальная сила и изгибающий момент в сечении x, σ_1 и σ_2 напряжения соответственно в нижней и верхней арматуре, F_1—площадь поперечного сечения каждого слоя арматуры.

Принимая гипотезу плоских сечений, будем иметь $\varepsilon=\varepsilon_0+\varkappa z$, где $\varkappa$—соответственно относительное удлинение и кривизна нейтрального слоя балки.

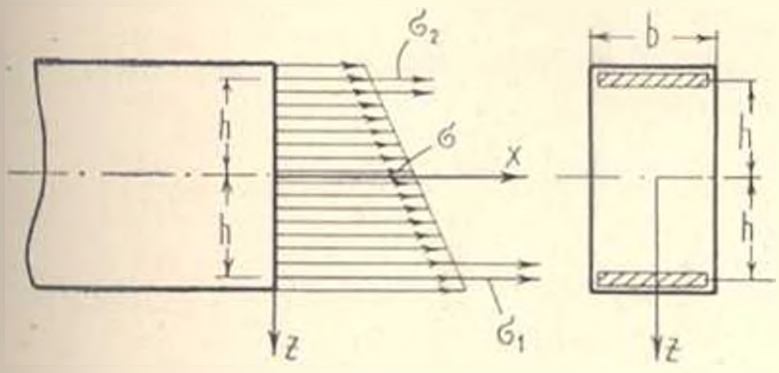

Рис. 1.

Используя условие равновесия (3), соотношения между напряжениями и деформацией в бетоне (1) и в арматурах

$$\sigma_1,\ \sigma_2=E_1(\varepsilon_0\pm\varkappa h) \tag{4}$$

и вводя обозначения $\nu=2E_1F_1/EF$, $F=2bh$, $J=\frac{2}{3}bh^3$, получим

$$\varepsilon_0=\frac{N}{EF}-\nu\varepsilon_0+\int_{x_1}^{x}\left|\frac{N}{EF}-3\nu\varkappa\right|K(t,\tau)d\tau, \tag{5}$$

$$\varkappa=\frac{M}{EJ}-3\nu\varkappa+\int_{x_1}^{x}\left|\frac{M}{EJ}-3\nu\varkappa\right|K(t,\tau)d\tau. \tag{6}$$

Для решения интегрального уравнения (5) относительно ε_0 удобно ввести новую неизвестную функцию

$$\varphi(x,t)=\frac{N(x,t)}{EF}-\nu\varepsilon_0(x,t). \tag{7}$$

Тогда из (5) приходим к следующему интегральному уравнению:

$$\varphi(x,t)=\frac{\alpha N(x,t)}{EF}-\beta\int_{x_1}^{x}\varphi(x,\tau)K(t,\tau)d\tau, \tag{8}$$

где $\alpha=1/1+\nu$, $\beta=\nu/1+\nu$. Решение уравнения (8) представится в виде

$$\varphi(x, t) = \frac{\alpha N(x, t)}{EF} - \int_{\tau_1}^{t} \frac{\alpha N(x, \tau)}{EF} R(t, \tau) d\tau, \tag{9}$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента ядра $-\beta K(t, \tau)$

$$R(t, \tau) = \gamma(\tau) - \gamma - D(\tau) \int_{\tau_1}^{t} e^{-\int_{\tau}^{\xi} \gamma(\xi) d\xi} d\xi, \tag{10}$$

$$\gamma(\tau) = \gamma[1 + \beta E\varphi(\tau)], \qquad D(\tau) = \gamma'(\tau) + \gamma^2(\tau) - \gamma\gamma(\tau).$$

Подставляя (9) в (7), находим

$$\varepsilon_0(x, t) = \frac{\alpha N(x, t)}{EF} + \int_{\tau_1}^{t} \frac{\lambda N(x, \tau)}{EF} R(t, \tau) d\tau, \tag{11}$$

где $\lambda = \alpha/\nu$. Аналогичным образом из (7) находим

$$\varkappa(x, t) = \frac{\alpha_1 M(x, t)}{EJ} + \int_{\tau_1}^{t} \frac{\lambda_1 M(x, \tau)}{EJ} R_1(t, \tau) d\tau, \tag{12}$$

где $\alpha_1 = 1/1 + 3\nu$, $\lambda_1 = 3\nu/1 + 3\nu$, а значение $R_1(t, \tau)$ определяется по формулам (10) заменой β через $3\nu\alpha_1$.

Напряжения в арматурах будут

$$\left.\begin{matrix}\sigma_1\\ \sigma_2\end{matrix}\right\} = \frac{\alpha N}{F} \pm \frac{\alpha_1 M}{W} + \int_{\tau_1}^{t} \left[\frac{\lambda N}{F} R \pm \frac{\lambda_1 M}{W} R_1\right] d\tau, \tag{13}$$

где $W = J/h$.

Учитывая линейность распределения напряжения по высоте поперечного сечения в бетоне, можно вывести формулы для напряжений в бетоне в нижних и верхних краях поперечного сечения

$$\left.\begin{matrix}\sigma_н\\ \sigma_в\end{matrix}\right\} = \frac{\alpha N}{F} \pm \frac{\alpha_1 M}{W} - \int_{\tau_1}^{t} \left[\frac{\alpha N}{F} R \pm \frac{\alpha_1 M}{W} R_1\right] d\tau. \tag{14}$$

Пусть под внешними силами рассматриваемая железобетонная балочная система находится в равновесии. Наряду с истинными нормальными силами $N(x, t)$ и изгибающими моментами $M(x, t)$ в момент t рассмотрим и другие возможные распределения нормальных сил и изгибающих моментов $N(x, t) + \delta N(x, t)$, $M(x, t) + \delta M(x, t)$, бесконечно близкие к реальному и удовлетворяющие уравнению равновесия и граничным условиям. В рассматриваемый момент t вариации δN и δM составляют уравновешенную систему. Тогда сумма работ вариаций δN, δM и вариаций внешних сил равна нулю

$$\int_{l} [\varepsilon_0 \delta N + \varkappa \delta M] dx = \sum_{k=1}^{n} w_i(t) \delta P_k(t). \tag{15}$$

Здесь $P_k(t)$ и $w_k(t)$ — обобщенные силы и обобщенные перемещения.

Подставляя (11) и (12) в (15), находим

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\alpha N^2(x,t)}{2EF}+\frac{\alpha_1 M^2(x,t)}{2EJ}+\int_{\tau_1}^{t}\left[\frac{\lambda N(x,\tau)}{EF}N(x,t)R(t,\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\lambda_1 M(x,\tau)}{EJ}M(x,t)R_1(t,\tau)\right]d\tau\right\}dx=\sum_{k=1}^{n}w_k(t)\delta P_k(t). \qquad (16)$$

Отсюда для обобщенного перемещения под обобщенной силой находим

$$w_i(t)=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\alpha N(x,t)}{EF}+\int_{\tau_1}^{t}\frac{\lambda N(x,\tau)}{EF}R(t,\tau)d\tau\right\}\frac{\partial N(x,t)}{\partial P_k(t)}dx+$$

$$+\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\alpha M(x,t)}{EJ}+\int_{\tau_1}^{t}\frac{\lambda_1 M(x,\tau)}{EJ}R_1(t,\tau)d\tau\right\}\frac{\partial M(x,t)}{\partial P_k(t)}dx.$$

Полученная формула выражает теорему Кастильяно для рассматриваемой железобетонной балочной системы [7, 8].

С целью иллюстрации рассмотрим один раз статически-неопределенную систему (фиг. 2а). Горизонтальная железобетонная балка, находящаяся под воздействием равномерно распределенной нагрузки с интенсивностью $q(t)$, поддерживается вертикальным металлическим стержнем. Для нахождения неизвестной реакции $H(t)$ имеем уравнение

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\alpha_1 M_1(x,t)}{EJ}+\int_{\tau_1}^{t}\frac{\lambda_1 M_1(x,\tau)}{EJ}R_1(t,\tau)d\tau\right\}\frac{\partial M_1(x,t)}{\partial H(t)}dx+$$

$$+\frac{N_2(t)l_2}{E_2F_2}\frac{\partial N_2(t)}{\partial H(t)}=0. \qquad (18)$$

Подставляя в (18)

$$M_1(x,t)=-\frac{q(t)x^2}{2}+H(t)x, \qquad N_2(t)=H(t) \qquad (19)$$

и вводя обозначения

$$\frac{3}{\alpha_1}\frac{EJ}{E_2F_2}\frac{l_2}{l_1^3}=\mu, \qquad \frac{3}{8}q(t)l-\chi(t)=H(t), \qquad (20)$$

где $\chi(t)$ — новая неизвестная функция, получим

$$\chi(t)=f(t)-\mu_1\int_{\tau_1}^{t}\chi(\tau)R_1(t,\tau)d\tau. \qquad (21)$$

Здесь

$$f(t)=\frac{3}{8}\,\frac{\mu}{1+\mu}\,q(t)l, \qquad \mu_1=\frac{1}{1+\mu}. \tag{22}$$

Преобразованием и дифференцированием (21) приводится к дифференциальному уравнению

$$\chi''(t)+\gamma_2(t)\chi'(t)=f''(t)+\gamma_1(t)f'(t) \tag{23}$$

с начальными условиями

$$\chi(\tau_1)=f(\tau_1), \quad \chi'(\tau_1)=f'(\tau_1)-\mu_1[\gamma_1(\tau_1)-\gamma]f(\tau_1). \tag{24}$$

Решение уравнения (23) при условиях (24) представится в виде

$$\chi(t)=f(t)-\int_{\tau_1}^{t} f(\tau)\,R_*(t,\tau)\,d\tau, \tag{25}$$

где — $R_*(t,\tau)$ — резольвента ядра — $\mu_1 R_1(t,\tau)$

$$R_*(t,\tau)=\gamma_2(\tau)-\gamma_1(\tau)-D_1(\tau)\int_{\tau}^{t} e^{-\int_{\tau}^{\xi}\gamma_2(t)dt}\,d\xi, \tag{26}$$

$$\gamma_1(\tau)=(1+\mu_1)\gamma_1(\tau)-\gamma\mu_1, \qquad D_1=\gamma_2'-\gamma_1'+\gamma_1^2-\gamma\gamma_2.$$

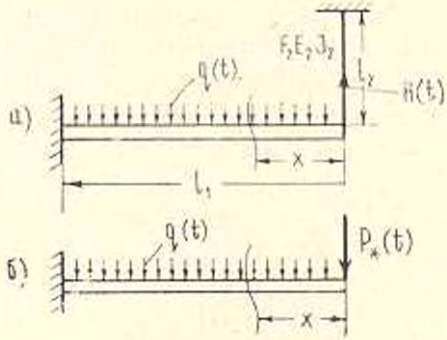

Рис. 2

Подставляя (25) в выражение $H(t)$ (20), получим

$$H(t)=\frac{3}{8}\,\frac{q(t)l_1}{1+\mu}\left[1+\mu\int_{\tau_1}^{t}\frac{q(\tau)}{q(t)}R^*(t,\tau)d\tau\right]. \tag{27}$$

В случае постоянного q и старого бетона ($\varphi(\tau)=\text{const}$) находим

$$H(t)=\frac{3ql}{8(1+\mu)}\left\{1+\frac{\mu_1(\gamma_1-\gamma)}{\gamma_1}\left[1-e^{-\gamma_1(t-\tau_1)}\right]\right\}. \tag{28}$$

Прогиб балки в узловой точке будет $w(t)=H(t)l_2/E_2F_2$.

В сечениях, где не приложена сосредоточенная сила (момент), прогиб (угол поворота) определяется методом введения добавочной

силы. Пусть железобетонная балка изгибается под воздействием равномерно распределенной нагрузки $q(t)$ и требуется определить прогиб свободного конца балки (фиг. 2б). В этом сечении приложим дополнительную силу $P_0(t)$. Тогда в этом сечении прогиб будет

$$w(t)=\int_0^l\left[\frac{a_2M(x,t)}{EJ}+\int_0^t\frac{a_2M(x,\tau)}{EJ}R_1(t,\tau)d\tau\right]\frac{\partial M(x,t)}{\partial P_0(t)}dx\Bigg|_{P_0(t)=0} \qquad (29)$$

Подставляя в (29)

$$M(x,t)=-\frac{q(t)x^2}{2}-P_0(t)x, \qquad \frac{\partial M(x,t)}{\partial P_0(t)}=-x$$

и принимая $P_0(t)=0$, получим

$$w(t)=\frac{a_2q(t)l^4}{EJ}\left[1+\frac{1}{3}\int_0^t\frac{q(\tau)}{q(t)}R_1(t,\tau)d\tau\right]. \qquad (31)$$

Представляет определенный интерес распространение приведенного вариационного метода на случай температурно-усадочных воздействий, несимметричного армирования, предварительно-напряженного железобетона и т. д.

Институт механики АН Армянской ССР Поступило 5.I.1974

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐԻ ԿԻՐԱՌՈՒՄԸ ԵՐԿԱԹԵՏՈՆՅԱՆ ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՑԻԱՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՈՒՄ

Ամփոփում

Հոդվածում բերվում է կաստիլյանոի բանաձևի ընդհանրացումը և նրա կիրառումը երկաթբետոնյա հեծանների համար՝ բետոնի ժառանգական սողքի պայմաններում։ Օրինակի համար քննարկված է մեկ անգամ ստատիկորեն անորոշ սիստեմ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести, ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
2. *Гвоздев А. А.* Развитие теории железобетона в СССР. «Бетон и железобетон», № 8, 1964.
3. *Александровский С. В.* Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия (с учетом ползучести). Стройиздат, М., 1966.
4. *Залецкий Н. Н.* Теория и расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом длительных процессов. Изд. «Будивельник», 1967.
5. *Прокопович И. Е.* Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений. Гостехиздат, М., 1963.
6. *Бондаренко В. М.* Некоторые вопросы нелинейной теории железобетона. Изд-во Харьковского университета, Харьков, 1968.
7. *Задоян М. А.* О вариационных уравнениях теории ползучести, ДАН Арм. ССР, т. 26, № 5, 1958.
8. *Задоян М. А.* Вариационное уравнение Кастильяно нелинейно-наследственной теории ползучести. Изв. АН СССР Механика твердого тела, № 5, 1972.