ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXVI, № 6, 1973 Серия технических наук

ЭНЕРГЕТИКА

Э. Л. ОГАНЕСЯН

# МЕТОД КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ С НЕЛИНЕЙНЫМИ АКТИВНЫМИ СОПРОТИВЛЕНИЯМИ

В работе излагается метод расчета электрической цепи при приложенных периодических напряжениях. Цепь постоянного тока может быть рассмотрена как частный случай цепи при периодических воздействиях. Обычно для нахождения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих нелинейные цепи переменного тока, наиболее часто используется классический метод гармонического баланса, а также метод Галеркина и реже метод коллокаций [1]. Эти методы эквивалентны в смысле получаемого решения. Наиболее существенным недостатком указанных методов является необходимость предварительного произвольного выбора числа членов тригонометрического полинома, принимаемого обычно за искомое решение. При этом выбор недостаточного числа членов ведет к недопустимо большим ошибкам и необходимости выполнения повторных громоздких вычислений для большего числа членов. Одновременно выбор большого числа членов с выполнением заведомо излишних громоздких вычислений.

В работе [2] изложен метод квазилинейных уравнений гармонических составляющих для расчета электрических цепей со сталью, который позволяет формализовать расчет сложной цепи и свести его к расчету цепи по квазилинейным комплексным уравнениям баланса напряжений отдельных гармоник. В данной статье метод квазилинейных уравнений гармонических составляющих распространяется также и на цепи, содержащей нелинейные активные сопротивления. Как и в случае цепей со сталью здесь используется принцип гармонического баланса для предварительно определенных э. д. с. и падений напряжений гармоник. При этом учитывается также влияние друг на друга стольких гармоник, сколько нужно для достижения требуемой точности расчета.

Изложим метод на примере простой последовательной цепи из $R$, $L$ и $C$. Пусть для общности $R$ будет представлен двумя сопротивлениями: линейным $R_1$ и нелинейным $r(i)$. Так как ток есть некоторая периодическая функция времени, то $r(i)$ также некоторая функция $r[i(t)]$.

Пусть уравнение цепи

$$L\frac{di(t)}{dt}+R_{\cdot}i(t)+r[i(t)]\cdot i(t)+\frac{1}{C}\int i(t)dt=E_0+E_m\sin\omega t, \qquad (1)$$

где $E_0$ — постоянная составляющая приложенного напряжения*. Дифференцируя (1), получим

$$L\frac{d^2i(t)}{dt^2}+R\frac{di(t)}{dt}+r[i(t)]\frac{di(t)}{dt}+i(t)\frac{dr[i(t)]}{dt}+\frac{i(t)}{C}=\omega E_m\cos\omega t. \qquad (2)$$

Члены $r[i(t)]\frac{di(t)}{dt}$ и $i(t)\frac{dr[i(t)]}{dt}$ приобретают определенный физический смысл в предположении, что периодический ток $i(t)$ может быть разложен на гармонические составляющие. Их сумма, очевидно, представляет собой скорость изменения падения напряжения на нелинейном сопротивлении $r[i(t)]$. Первый член можно сопоставить со скоростью изменения падения напряжения на нелинейном сопротивлении $r_{\text{дин}}[i(t)]\frac{di(t)}{dt}=\frac{du_{\text{н}}}{dt}$. Это слагаемое можно принять за падение напряжения на некотором расчетном нелинейном сопротивлении с $r_{\text{дин}}[i(t)]=r[i(t)]$. Второе слагаемое с обратным знаком может рассматриваться как скорость изменения некоторой параметрической э. д. с. высших гармоник и поправок к э. д. с. гармоник. Источником э. д. с. высших гармоник здесь является нелинейное сопротивление, а причиной возникновения этих э. д. с. — изменение величины параметра нелинейного сопротивления под действием приложенного напряжения и тока через это сопротивление.

Такое разделение скорости изменения падения напряжения на нелинейном сопротивлении как и в [2] непроизвольное. Э. д. с. обычно необходимо рассматривать как причину тока, а падение напряжения как его следствие. При этом из приравнивания нулю выражения, принятого за э. д. с., должно следовать равенство нулю токов, продолжительно ею вызываемых. Действительно, из приравнивания нулю предполагаемого выражения для э. д. с. высших гармоник и, следовательно, ее изменений, т. е. из

$$i(t)\frac{dr[i(t)]}{dt}=0,$$

следует, что $r[i(t)]=\text{const}$, т. е. в конечном счете равенство нулю токов высших гармоник. Приравнивание же нулю падения напряжения на ненулевом сопротивлении при ненулевых токах должно привести и приводит в нашем случае к противоречию и нарушению равенства (1).

Отметим, что поправкой к э. д. с. гармоник мы называем некоторую расчетную часть э. д. с. данной гармоники, идущую на образование токов высших гармоник [2].

* $E_0$ введено для общности. В случае пренебрежения токами утечки конденсатора, очевидно, $E_0$ может быть опущено.

Полагаем, что характеристики нелинейных активных сопротивлений могут быть выражены аналитически [1], а именно, согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса [3], степенным полиномом некоторого порядка. При выводе расчетных формул в дальнейшем мы не ограничиваем порядок полинома. Более того, мы можем нелинейную зависимость выразить рядом Маклорена. Однако, из-за необходимого ограничения вычислительных операций, на практике приходится ограничиваться некоторым порядком степенного полинома $n$. Очевидно, порядок полинома $n$ будет зависеть от типа нелинейной характеристики и требуемой точности аппроксимации.

В большинстве случаев можно ограничиваться значениями $n \leqslant 6$ [1].

Пусть напряжение на нелинейном сопротивлении

$$u_н(i) = \sum_{p=0}^{n} a_p i^{p+1}, \tag{3}$$

или

$$r(i) = \frac{u_н(i)}{i} = \sum_{p=0}^{n} a_p i^{p}. \tag{4}$$

Уравнение (1) с учетом вышеизложенного можно записать в виде

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_r - e_п + \frac{1}{C}\int i(t)dt = E_0 + E_m \sin \omega t, \tag{5}$$

где $u_r = \int r(i)di$ — падение напряжения на расчетном нелинейном сопротивлении; $e_п = -\int idr(i)$ — э. д. с. высших гармоник и поправки к э. д. с. гармоник. С учетом выражения (4) получаем, что

$$u_r = \int r(i)di = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1} a_p i^{p+1} + C_1 = \sum_{p=0}^{n} a'_p i^{p+1} + C_1 = r'(i)\cdot i + C_1, \tag{6}$$

а параметрическая э. д. с.

$$e_п = -\int idr(i) = -\sum_{p=0}^{n} \frac{p}{p+1} a_p i^{p+1} + C_2 = -\sum_{p=0}^{n} a''_p i^{p+1} + C_2 = -r''(i)\cdot i + C_2.$$

Так как $u_н(i) = u_r - e_п$, то из выражений (3), (6) и (7) получаем

$$C_1 - C_2 = 0. \tag{8}$$

Постоянная интегрирования $C_2$ может быть определена из выражения (7) для случая, когда принимается, что нелинейное сопротивление $r(i) = r_0 = \mathrm{const}$. Тогда параметрическая э. д. с. $e_{п.0}$, обусловленная нелинейностью $r(i)$, равна нулю. При этом постоянные составляющие будут: от $r'(i)$

$$r'_0 = r_0,$$

а от сопротивления $r''(i)$, согласно выражению (7),

$$r''_0 = 0. \tag{9}$$

Соответственно параметрическая э. д. с. при $r(I)=\text{const}$

$$e_{n,0}=r_0' \cdot I+C_2=0 \cdot I+C_2=0.$$

Из выражений (8) и (10) следует, что

$$C_1=C_2=0. \tag{11}$$

Тогда выражение расчетного падения напряжения на нелинейном сопротивлении будет

$$u_r=\sum_{p=0}^{n}\frac{1}{p+1}\,a_p I^{p+1}=\sum_{p=0}^{n} a_p' I^{p+1}=r'(I)\cdot I, \tag{12}$$

а выражение параметрического э. д. с. соответственно

$$e_n=r''(I)\cdot I. \tag{13}$$

Разлагая периодический ток на гармонические, заменяя синусоидальные токи эквивалентными косинусоидальными и учитывая, что произведения гармоник дают новые гармоники с частотами, равными сумме и разности частот гармоник, входящих в произведение, выделим из получаемого множества гармоник падений напряжения $k$-ую гармонику. Тогда

$$\begin{aligned}
u_{mr,k}\sin(k\omega t+\beta_k) &= a_0 I_{m,k}\cos(k\omega t+\varphi_k')+\\
&+\frac{1}{2}a_1\sum_{x_1\in N_2}\ \sum_{x_2\in N_2}\frac{1}{2}I_{m,x_1}I_{m,x_2}\cos(k\omega t+\varphi_{x_1}'+\varphi_{x_2}')+\cdots+\\
&+\frac{1}{p+1}a_p\sum_{x_1\in N_{p+1}}\ \sum_{x_2\in N_{p+1}}\ \sum_{x_{p+1}\in N_{p+1}}\left(\frac{1}{2}\right)^p I_{m,x_1}I_{m,x_2}\cdots I_{m,x_{p+1}}\times\\
&\times\cos(k\omega t+\varphi_{x_1}'+\cdots+\varphi_{x_{p+1}}')+\cdots
\end{aligned} \tag{14}$$

где $N_p=\{(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_p)\mid x_i=\pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ \sum_{i=1}^{p} x_i=k\}$.

$$(p=0, 1, 2, \ldots, n)$$

Поскольку синусоидальные токи нами заменены косинусоидальными, то

$$\varphi_{x_i}'=\pi/2-\varphi_{x_i}, \tag{15}$$

где $\varphi_{x_i}$—фаза синусоидального тока. Постоянную составляющую мы рассматриваем как нулевую гармонику и распространяем на нее все операции расчета; отсюда и $=0$. Величина индекса $x_i$, как и в [2], есть номер гармоники, знак индекса—знак суммирования угла гармоники, поэтому дожно иметь место

$$\varphi_{-x_i}'=-\varphi_{x_i}'. \tag{16}$$

Разлагая ток $I(t)$ на гармонические составляющие, из выражения (4) можем выделить $k$-ую гармонику нелинейного сопротивления. Тогда будем иметь

$$r_{m,k}\sin(k\omega t+\varphi_k)-a_1 I_{m,k}\cos(k\omega t+\varphi_k')+$$

$$+a_2\sum_{x_1\in N_2}\sum_{x_2\in N_2}\frac{1}{2}I_{m,x_1}I_{m,x_2}\cos(k\omega t+\varphi_{x_1}'+\varphi_{x_2}')+\ldots+$$

$$+a_p\sum_{x_1\in N_p}\sum_{x_2\in N_p}\cdots\sum_{x_p\in N_p}\left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}I_{m,x_1}I_{m,x_2}\ldots I_{m,x_p}\cos(k\omega t+\varphi_{x_1}'+\varphi_{x_2}'+$$

$$+\ldots+\varphi_{x_p}')+\ldots \tag{17}$$

Здесь

$$N_p=\{(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots x_p)\,|\,x_i=\pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm k; \sum_{i=1}^{p} x_i=k\}.$$

Ограничение $|x_i|\leqslant k$ налагается из-за причинно-последовательной связи в образовании высших гармоник тока и гармоник изменения нелинейного сопротивления, согласно которой, гармоники изменения параметра нелинейных элементов электрических цепей не могут быть образованы гармониками тока более высокого порядка, чем гармоника изменения параметра нелинейного элемента [3]. Исходя из того же принципа причинно-последовательной связи, т. е. последовательности «э. д. с.—ток—падение напряжения», можно утверждать, что высшие гармоники э. д. с. также могут быть образованы только гармониками тока и изменениями сопротивления более низкого порядка, чем гармоники э. д. с. Поэтому из выражения (13) для $k$-ой гармоники э. д. с. получим

$$e_{n,k}=-\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{k-1}\frac{p}{p+1}I_{m,q}r_{m,k-q}\sin(k\omega t+\varphi_q+\psi_{k-q}). \tag{18}$$

Поправка к э. д. с. $k$-ой гармоники, являющаяся функцией всех гармоник тока, будет

$$\Delta e_{n,k}=-\frac{1}{2}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{p}{p+1}\left[I_{m,q}r_{m,k+q}\sin(k\omega t-\varphi_q+\psi_{q+k})-\right.$$

$$\left.-I_{m,k+q}r_{m,q}\sin(k\omega t+\varphi_{k+q}-\psi_q)\right]. \tag{19}$$

В соответствии с выражениями (9) и (13) $r_0$ исключается из (18) и (19). При этом для собственно э. д. с. высших гармоник $e_{n,k}$ должно быть $k>1$, а для поправок к э. д. с. гармоник $\Delta e_{n,k}$ $k$ может принимать значения $k=0, 1, 2, \ldots$. Появляющуюся в цепях с несимметричными нелинейными активными сопротивлениями постоянную составляющую э. д. с. при $E_0=0$, обуславливающую протекание постоянных токов в цепи, следует считать поправкой к э. д. с. гармоник как по соображениям причинно-последовательной связи в образовании гармоник, так и в соответствии с расчетной формулой (19). При $E_0\neq 0$ указанная постоянная составляющая, естественно, будет рассматриваться как поправка к $E_0$.

Приведенное расчетное сопротивление по $k$-ой гармонике может быть определено как отношение соответствующих гармоник напряжения и тока [1]

$$r_k = \frac{u_{m,k}}{I_{m,k}} = \frac{u_{r,k}}{I_k} = \frac{u_{cp,k}}{I_{cp,k}}. \tag{20}$$

Уравнение баланса напряжений по $k$-ой гармонике в рассматриваемой цепи в комплексной форме запишется в виде

$$\dot{U}_{r,k} + (R+jX)\dot{I}_k = \dot{E}_k + \Delta\dot{E}_k. \tag{21}$$

Для постоянной составляющей, очевидно, индуктивное сопротивление $X_L = 0$, а емкость при необходимости может быть представлена сопротивлением утечки.

Гармоника тока рассчитывается итерациями с разделением на два этапа: 1) на приближенную итерацию без учета гармоник тока выше $k$-ой, следовательно, без учета $\Delta e_{n,k}$; 2) на точную итерацию — с учетом также и гармоник выше $k$-ой, следовательно с учетом и $\Delta e_{n,k}$. При этом в уравнении (21) при приближенных итерациях не учитываются член $\Delta\dot{E}_k$ и гармоники выше $k$-ой при определении $\dot{U}_{r,k}$, т. е. в этом случае множество $N$ ограничивается значениями $|x_i| \leq k$.

Для сложной цепи уравнения контурных токов $k$-ой гармоники в матричной форме имеют вид [2]:

$$[Z_{p,q,k}]\,[\dot{I}_{q,k}] = [\dot{E}_{p,k} + \Delta\dot{E}_{p,k}]. \tag{22}$$

Здесь в $Z_{p,q,k}$ входят приведенные сопротивления по $k$-ой гармонике, активные и реактивные сопротивления контуров. Следует учесть, что смежные нелинейные сопротивления являются функциями суммы токов, протекающих через эти сопротивления.

Точность каждой рассчитываемой гармоники будет зависеть от точности аппроксимации нелинейных характеристик $r(i)$ аналитическим выражением — степенным полиномом — и от числа учитываемых гармоник $n_1$, которое следует брать несколько больше числа рассчитываемых гармоник $n_2$. При достижении необходимой точности общего решения с учетом резонансных условий на какой-либо гармонике, когда величиной последующих гармоник можно пренебречь, вычисления прекращаются. При этом следует различать точность общего решения от точности расчета отдельных гармоник и точности итераций, т. е. совпадения $I_k^{(i)}$ и $I_k^{(i+1)}$.

Алгоритм расчета цепей, содержащих нелинейные активные или индуктивные сопротивления и емкости определенной величины, т. е. цепей, в которых возможен резонанс на какой-либо высшей гармонике, несколько будет отличаться от алгоритма расчета цепей, не содержащих емкостей. Это отличие заключается в необходимости приближенного и уточненного определения резонансной частоты и величины тока резонансной гармоники. Соответственно, отличается и блок-схема расчета такой цепи на ЭЦВМ (рис. 1). Как и в [2], метод квазилинейных комплексных уравнений гармонических составляющих позволяет формализовать расчет сложной электрической цепи, содержащей нелинейные активные сопротивления, т. е. позволяет исключить операции по составлению и упорядочению нелинейных дифференциальных уравнений баланса напряжений и токов, применить к этим цепям методы линейной электротехники и использовать программы расчета линейных цепей [4] в качестве подпрограмм для ЭЦВМ.

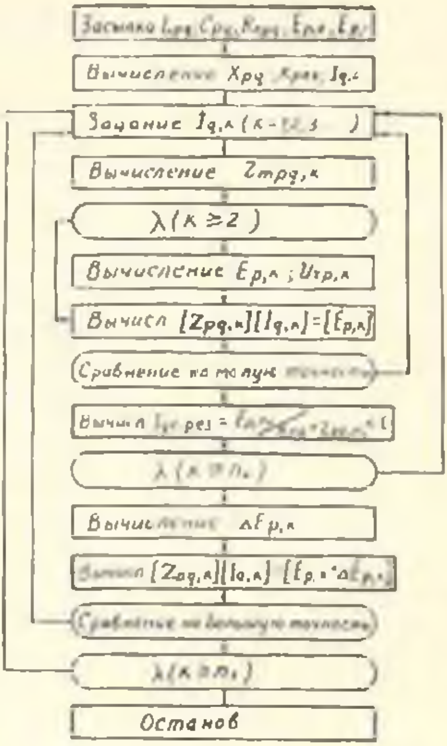


Рис. 1.

Метод квазилинейных уравнений и в случае цепей, состоящих только из активных линейных и нелинейных сопротивлений, позволяет избежать излишних операций, так как эти цепи хотя и описываются алгебраическими уравнениями, но они нелинейны, и здесь непосредственно нельзя применить методы линейной электротехники. При наличии резонанса на какой-либо гармонике возможно в некоторой степени увеличение числа вычислительных операций, так как для достижения требуемой точности общего решения может быть потребуется рассчитать большее число гармоник. Очевидно, количество вычислительных операций связано с точностью расчета, однако анализ такой связи представляет собой отдельный сложный вопрос и выходит за рамки рассматриваемой здесь задачи.

Метод апробирован на примере простой цепи из линейного $R$- и нелинейного $r(I)=aI^2$ сопротивлений. Результаты сравнения с классическим методом гармонического баланса и известным графическим методом аналогичны приведенным в [5].

## Выводы

1. Предлагаемый метод представляет собой развитие принципа гармонического баланса для расчета сложной цепи с нелинейными активными сопротивлениями по квазилинейным рекуррентным уравнениям гармонических составляющих.

2. Метод позволяет формализовать расчет сложных цепей и избежать излишних вычислений, возможных при применении метода гармонического баланса.

3. Метод дает возможность получать решения с любой заданной точностью, не ограничиваясь ни степенью аппроксимирующего полинома, ни точностью и числом рассчитываемых гармоник.

4. Расчет цепи общего случая с нелинейными активными сопротивлениями сводится к решению квазилинейных комплексных уравнений контурных токов или узловых напряжений.

АрмНИИЭ Поступило 18 VI 1973

Է. Լ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

## ՀԱՐՄՈՆԻԿ ԲԱՂԱԴՐԻՉՆԵՐԻ ՁԵՎՈՎ ԿԵՂԾ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԱԿՏԻՎ ԴԻՄԱԴՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՇՂԹԱՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՀԱՄԱՐ


Ա մ փ ո փ ո ւ մ

*Առաջարկվում է հաշվարկի մեթոդ, որն իրենից ներկայացնում է հարմոնիկ բալանսի սկզբունքի զարգացումը ոչ-գծային ակտիվ դիմադրություններ պարունակող բարդ էլեկտրական շղթաների հաշվարկ կատարելու համար ըստ առանձին հարմոնիկաների լարման բալանսի ձևով գծային կոմպլեքսային հավասարումներով։ Մեթոդը թույլ է տալիս ֆորմալիզացնել և պարզեցնել հավասարումների կազմելը և լուծելը և հարմոնիկ բաղադրիչների լուծման համար օգտագործել գծային էլեկտրատեխնիկայի մեթոդները, օրինակ՝ կոնտուրային հոսանքների մեթոդը։ Մեթոդը թույլ է տալիս կատարել հաշվարկ նաև որևէ մի հարմոնիկայի վրա ռեզոնանսի դեպքում։ Ոչ-գծային ակտիվ դիմադրությունների բնութագրերը մոտարկվում են ցանկացած կարգի աստիճան ունեցող բազմանդամով։ Մեթոդը հաշվի է առնում հոսանքի հարմոնիկաների փոխազդեցությունը մեկը մյուսի վրա։ Հնարավոր է թվային հաշվիչ մեքենայի անմիջական օգտագործումը հաշվարկի համար։*


## ЛИТЕРАТУРА


1. *Бессонов Л. А.*, Нелинейные электрические цепи. Изд. «Высшая школа», 1964.
2. *Оганесян Э. Л.* Метод квазилинейных уравнений гармонических составляющих при расчете цепей со сталью. «Известия АН Арм. ССР (серия Т. Н.)», т. XXV, № 4, 1972.
3. *Ахиезер Н. П.* Лекции по теории аппроксимаций. Изд. «Наука», 1965.
4. *Адонц Г. Т.* Многополюсник. Изд. АН Арм. ССР, 1965.
5. *Атабеков Г. И.*, *Тимофеев А. Б.*, *Хухриков С. С.* Теоретические основы электротехники, ч. 2, Изд. «Энергия», 1970.