

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

В. М. МКРТЧЯН

К ОЦЕНКЕ КАЧЕСТВА СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В расчетах систем регулирования требуется, чтобы система была не только устойчивой, но и обладала определенными параметрами качества. Помимо известных критериев качества, не учитывающих влияния кратности корней характеристического полинома, в статье предлагается методика оценки параметров качества линейных дискретных систем, устраняющая указанный недостаток. При этом получаются простые критерии качества, легко реализуемые на ЭВМ.

1. Показатели качества. Степень устойчивости линейных дискретных систем определяется [1] наибольшим по модулю корнем характеристического полинома

$$P(z) = \sum_{m=0}^n a_m z^{n-m} \quad (1)$$

по формуле

$$\xi = 1 - \max_{1 \leq m \leq n} R_m \quad (2)$$

т. е. наиболее медленно затухающим компонентом переходного процесса. Степень устойчивости позволяет приближенно оценить быстроту затухания процесса: чем больше ξ , тем быстрее затухает процесс [1,2]. Также можно приближенно оценить длительность переходного процесса

$$\tau_p \leq \frac{3}{\xi} \quad (3)$$

и степень колебательности [1]

$$\eta = \max_{1 \leq m \leq n} \frac{\tau_m}{\xi} \quad (4)$$

Однако параметры качества системы, определяемые формулами (2), (3) и (4), справедливы лишь для случаев, когда полином (1) не имеет ни одного кратного корня, и значительно ухудшаются при их кратности (см. табл. 1). Кроме того, они находятся, если известны корни полинома (1).

2. Показатели качества с учетом кратности корней

Степень устойчивости. В работе [3] доказывается, что корни харак-

характеристического полинома устойчивой линейной дискретной системы находятся внутри окружности радиуса

$$R = \frac{M-1}{M}, \quad (5)$$

где M — наибольшее значение производной аргумента полинома (1):

$$M = \sup_{\varphi} H(\varphi) \geq \frac{1}{1-R_m}; \quad H(\varphi) = \frac{d}{d\varphi} |\arg P(e^{j\varphi})|. \quad (6)$$

Учитывая (5) и (6), определяем степень устойчивости линейной дискретной системы по аналогии (2) следующим образом:

$$\delta = \min_m (1 - R_m) \geq \frac{1}{M}. \quad (7)$$

Отсюда видно, что степень устойчивости уменьшается с увеличением M . Но значение M увеличивается с возрастанием кратности корней и наоборот, и заключает в себе информацию о всех корнях характеристического полинома (1). Эта зависимость иллюстрируется в приведенных примерах.

Следовательно, степень устойчивости δ учитывает все особенности системы (1) и правильно оценивает степень устойчивости, чем ξ . Отметим, что вопрос определения значения δ решается с помощью ЭВМ и, в отличие от способа определения ξ , не требует нахождения корней полинома (1).

Время регулирования. В [4] показано влияние кратности корня на время регулирования, однако не дается способ учета этого фактора для его определения в общем случае.

Рассмотрим решение разностного уравнения в случае простых корней [5]:

$$y(z) = \sum_{k=1}^n c_k R_k^2 e^{j\varphi_k}, \quad (8)$$

где c_k — постоянные коэффициенты, определяемые начальными условиями, R_k и φ_k — соответственно модуль и аргумент корня характеристического полинома (1). Модуль каждого слагаемого решения (8) определяется значением $c_k R_k^2$. Учитывая, что $R_k \leq 1 - \delta$, оценим время регулирования t_p переходного процесса. Для этого потребуем, чтобы за время t_p амплитуда уменьшалась в e^1 раз:

$$c_k R_k^2 e^{-t_p} = c_k R_k^2 e^1. \quad (9)$$

Отсюда, после простых преобразований, получим

$$t_p \approx \frac{1}{|\ln(1-\delta)|}, \quad (n=3 \div 5) \quad (10)$$

Из (10) заключаем, что t_p возрастает с увеличением кратности каждого корня, так как при этом уменьшается значение δ . Таким образом, не находя корней характеристического полинома (1), по формуле (10) определяется время регулирования переходного процесса с учетом кратности корней. В приведенных примерах принято $\lambda=3$.

Степень колебательности. Аналогично (4) определим степень колебательности соотношением

$$\rho = \max_m \varphi_m \cdot R_m \leq \varphi_m (1 - \delta), \quad (11)$$

где φ_m — наибольшее значение из всех аргументов корней характеристического полинома. Сравнивая (11) с (4), заключаем, что по (11) точнее оценивается степень колебательности как при кратных, так и при простых корнях. Причем, с увеличением кратности корней увеличивается ρ и наоборот. В случае действительного положительного корня $\varphi_m=0$ и, следовательно, $\rho=0$, что соответствует аperiodическому переходному процессу. А если полином (1) не имеет положительных действительных корней, то $\varphi_m=2\pi$ и ρ определяется по (11) с подстановкой $\varphi_m=2\pi$.

Таким образом, не находя корней характеристического полинома, можно оценить степень колебательности:

$$\rho \leq \begin{cases} 2\pi(1-\delta) & \text{если } \varphi_m \neq 0; \\ 0 & \text{если } \varphi_m = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Примеры. Во всех приведенных ниже примерах функция $\Theta(z)$ вычисляется так же, как и в работе [3]. Рассмотрим три характерных примера, отличающихся по виду переходного процесса. Кратность корня обозначим через λ .

Пример 1. Характеристический полином устойчивой линейной дискретной системы имеет действительный положительный корень

$$P(z) = (z - 0,7)^\lambda, \quad \lambda = 1, 2, 3, 5. \quad (14)$$

Оценить показатели качества системы.

График функции $\Theta(z)$ полинома (14) в интервале $[0, 2\pi]$ приведен на рис. 1, а на рис. 2 приведены графики переходных функций (16) $h_k(t)$ системы (14) при подаче на ее вход единичного скачка с начальными условиями:

$$y(0) = 1; \quad y^{(k)}(0) = 0; \quad (k = 1, 2, \dots, \lambda - 1) \quad (15)$$

$$h_1(t) = 1 - 0,7^t;$$

$$h_2(t) = 1 - h_1(t)(1 - t \ln 0,7);$$

$$h_3(t) = 1 - h_1(t) \left[1 - t \ln 0,7 + \frac{(t \ln 0,7)^2}{2} \right]; \quad (16)$$

$$h_5(t) = 1 - h_1(t) \left[1 - t \ln 0,7 + \frac{(t \ln 0,7)^2}{2} - \frac{(t \ln 0,7)^3}{6} + \frac{(t \ln 0,7)^4}{24} \right]$$

В табл. 1 приведены расчетные и точные значения времени регулирования и степеней устойчивости и колебательности, которые подтверждают правильность предложенной методики оценки параметров качества как при простых, так и при кратных корнях. Этот вывод справедлив и для следующих примеров.

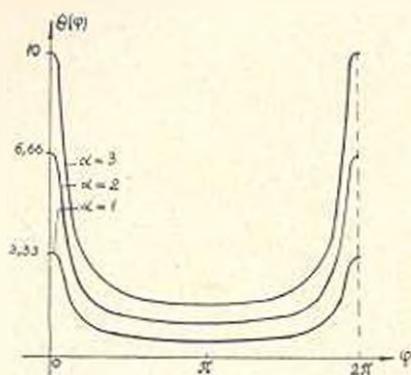


Рис. 1.

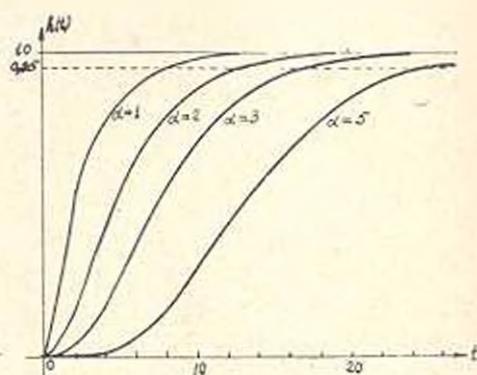


Рис. 2.

Таблица 1

	α	ξ	t_p		T_p
			точное	теоретическое	
Случай положительного действительного корня					
1	0.30	0.3	8.2	8.43	10
2	0.15	0.3	13	18	10
3	0.10	0.3	18	28	10
5	0.06	0.3	28	48	10
Случай отрицательного действительного корня					
1	0.30	0.3	8.1	8.43	10
2	0.15	0.3	13	18	10
3	0.10	0.3	18	28	10
5	0.06	0.3	28	48	10
Случай комплексного корня					
1	0.27	0.5	8.5	9.28	6
2	0.14	0.5	12	20	6

Пример 2. Характеристический полином устойчивой линейной дискретной системы имеет действительный отрицательный корень

$$P(z) = (z + 0.7)^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3, 5. \quad (17)$$

Оценить показатели качества системы.

График функции $\theta(\varphi)$ для этого случая приведен на рис. 3. Переходные функции определяются выражениями (16), лишь с той разницей, что для данного случая $h_1(t) = 1 - (-0,7)^t$ — знакопеременная функция от времени. На рис. 4 приведены графики отгибающих переходных функций. Так как $\varphi_M = 0$, то переходный процесс коле-

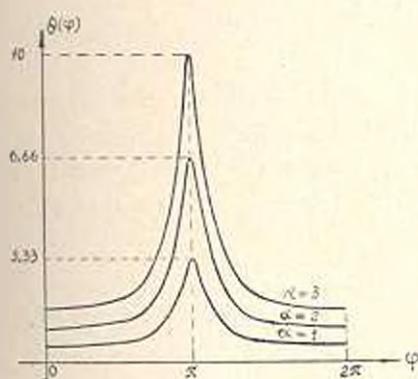


Рис. 3.

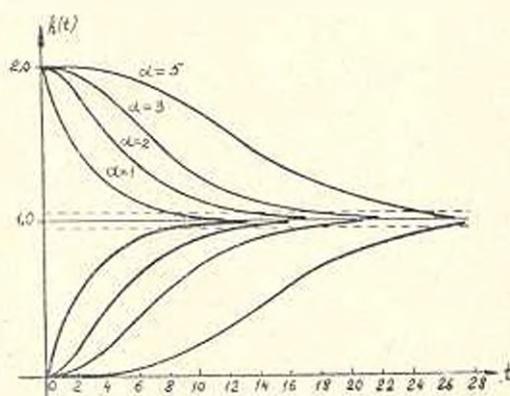


Рис. 4.

бательно-затухающий, и степень колебательности определяется по формуле (13). Численные значения параметров качества приведены в табл. 1.

Пример 3. Характеристический полином устойчивой линейной дискретной системы имеет комплексный корень

$$P(z) = [z - (0,5 + i0,5)]^2 [z - (0,5 - i0,5)]^2 \quad (z=1, 2) \quad (18)$$

Оценить показатели качества системы.

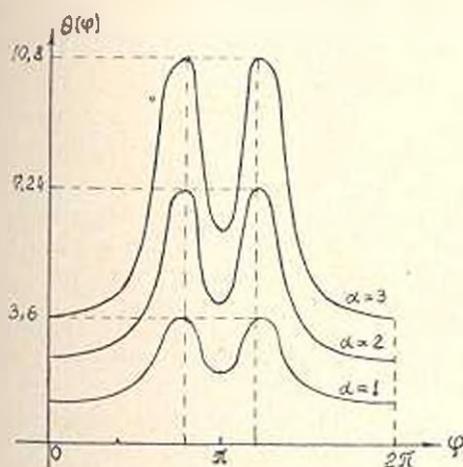


Рис. 5.

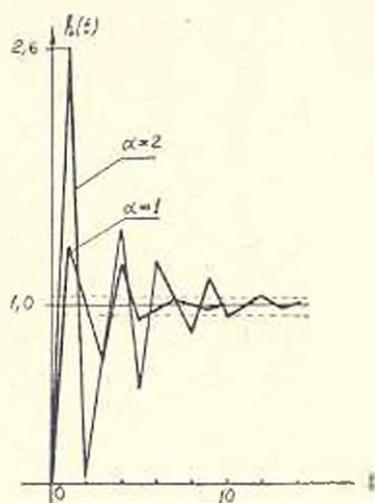


Рис. 6.

График функции $H(z)$ приведен на рис. 5. Переходные функции системы (18) при подаче на вход единичного скачка и при условиях (15) следующие:

$$h_1(t) = 1 - 0,707^t \left(\cos \frac{3\pi}{4} t + 0,3167 \sin \frac{3\pi}{4} t \right);$$

$$h_2(t) = 1 - 0,707^t \left[(1 + 0,17t) \cos \frac{3\pi}{4} t - (0,726 + 1,2t) \sin \frac{3\pi}{4} t \right]. \quad (19)$$

График функций (19) приведен на рис. 6, а в табл. 1 для сравнения приведены расчетные и точные значения параметров качества. В данном случае $\varphi_0 \neq 0$, следовательно, переходный процесс носит колебательно-затухающий характер, что хорошо видно из графиков на рис. 6.

ԵրԻՄԻՄՄ

Ստացուիլո 17.V.1972

Վ. Մ. ԱՎԵՏԻԱՆ

ԱՎՏՈՒՄԱՆ ԿԱՐԳԱՎՈՐՈՒՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԿԻ ՈՐԱԿԻ ԳՆԱՀՍՏՈՒՄԱՆ ՀՈՒՐՋԸ

Ս. Վ Փ Ն Փ Ն Տ Ո

Առաջադրվում է գծային րնդհատ համակարգի սրահի ղեկհատման նոր մեթոդ, որը հիմնվում է րնդհարգի բազմանդամի արդյունենաի ածանցյալի ամենամեծ արժեքի վրա և հաշվի է առնում այդ բազմանդամի արժուաների բազմապատիկությունը: Ցույց է տրվում մեթոդի արդյունավետությունը իվազին հաշվիչ մեքենաների կիրառման ղեկըրում և յուսաբանվում է րնդհարգի օրինակներով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Цыпкии Я. Э. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, М., 1963.
2. Ту Юрий Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. Изд. «Машиностроение», М., 1964.
3. Мкртчян В. М., Мелкумян Д. О. Определение устойчивости линейных дискретных систем и оценка ее качества «Известия АН Арм. ССР (серия Т. II)», т. XXV, № 2, 1972.
4. Фельдман Л. А. Электрические системы автоматического регулирования Оборон-гиз, М., 1957.
5. Гивенский Л. С. и др. Математические основы теории управляемых систем. Изд. «Наука», 1969.