ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXVI, № 2, 1973 Серия технических наук

МАШИНОСТРОЕНИЕ

С. Т. ХАЧАТРЯН

НЕКОТОРЫЕ УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НА ЗАДАННОМ ИНТЕРВАЛЕ ВРЕМЕНИ

1. Рассматривается задача об устойчивости движения на заданном интервале времени в следующей постановке [1].

Определение. Если уравнения возмущенного движения таковы, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ любое решение $x(t)$ уравнений, начальное значение $x_0=x(t_0)$ которого удовлетворяет условию

$$(G(t_0)x_0,\ G(t_0)x_0)\le\varepsilon^2 \tag{1.1}$$

на заданном (конечном) интервале $t_0\le t<T$, удовлетворяет условию

$$(G(t)x(t),\ G(t)x(t))<\varepsilon^2, \tag{1.2}$$

где $G(t)$ — заданная ограниченная матрица, то невозмущенное движение по отношению к области (1.2) устойчиво на интервале $[t_0, T)$; в противном случае — неустойчиво.

Здесь, как и в определении устойчивости на конечном интервале времени, предложенном Г. В. Каменковым [4], ограничение области предельных отклонений вводится посредством достаточно малого (наперед не заданного) положительного числа. Что касается области предельных отклонений, то здесь она имеет форму эллипсоида с переменными параметрами.

Невозмущенное движение будем называть равномерно устойчивым на интервале $[t_0, T)$, если оно устойчиво в смысле приведенного определения на любом интервале $[t_*, T)$, где $t_*\in[t_0, T)$.

2. Пусть задача об устойчивости движения системы приведена к исследованию на заданном интервале времени $[t_0, T)$ решений уравнений возмущенного движения, представленных в векторно-матричной записи в виде

$$\frac{dx}{dt}=U(t)x+h(t,\ x), \tag{2.1}$$

где $U(t)$ — квадратная матрица порядка n, а x и $h(t, x)$ — столбцовые матрицы.

Будем предполагать, что элементы матрицы $h(t, x)$ — нелинейные функции возмущений x_s $(s=1, \ldots, n)$ таковы, что равномерно по t в пределах заданного интервала $[t_0, T)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{h(t,\ x)}{\|x\|}=0. \tag{2.2}$$

Говоря о возмущенных движениях, близких к невозмущенному, будем подразумевать движения, при которых начальные возмущения достаточно малы.

Зададим область предельных отклонений в виде

$$V(t,\ x)=(K^{-1}(t)x,\ K^{-1}(t)x), \tag{2.3}$$

где матрица $K(t)$ невырождена и эрмитова норма ее столбцов K_s ($s=1,\ \ldots,\ n$) совпадает с заданной положительной функцией $\delta(t)$,

$$\|K_s\|=\delta(t)\quad s=1,\ \ldots,\ n.$$

Соответствующим выбором матрицы $K(t)$ можно получить области предельных отклонений весьма разнообразной формы. Задание матрицы $K(t)$ будем связывать с каноническим преобразованием линейной части уравнений возмущенного движения при переходе к новым переменным y, а именно:

$$x=K(t)y\qquad (y=y(t)). \tag{2.4}$$

Здесь в качестве $K(t)$ примем невырожденное решение уравнения

$$\frac{dK(t)}{dt}=U(t)K(t)-K(t)\Lambda(t)+P(t), \tag{2.5}$$

где $\Lambda(t)=\mathrm{diag}(\lambda_1(t),\ \ldots,\ \lambda_n(t))$, а $P(t)$ — некоторая квадратная матрица порядка n.

Замена переменных (2.4) приводит уравнение (2.1) к виду

$$\frac{dy}{dt}=\Lambda(t)y-K^{-1}(t)P(t)y+K^{-1}(t)h(t,\ Ky). \tag{2.6}$$

В [1] доказано, что класс преобразований (2.4) включает в себе преобразование, которое приводит к уравнению (2.6) при $P(t)=0$. Из (2.5) следует, что при выборе в качестве $K(t)$ матрицы, приводящей $U(t)$ к диагональному виду, преобразование (2.4) приводит к уравнению (2.6) при $P(t)=\frac{dK(t)}{dt}$. При этом элементами матрицы $\Lambda(t)$ будут собственные значения матрицы $U(t)$, а столбцы K_s ($s=1,\ \ldots,\ n$) — соответствующими собственными векторами.

Учитывая (2.4), равенство (2.3) можно переписать в виде

$$V(t,\ x)=(y,\ y)=\|y\|^2. \tag{2.7}$$

Отсюда

$$\frac{dV(t,\ x)}{dt}=2\,\|y\|\,\frac{d\|y\|}{dt}. \tag{2.8}$$

Из (2.6) находим

$$\frac{d\|y\|}{dt}=\sum_{\sigma=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_\sigma(t)\frac{|y_\sigma|^2}{\|y\|}+\frac{y^*C(t)y}{\|y\|}+\frac{1}{2\|y\|}(y^*K^{-1}(t)h(t,\ Ky)+$$

$$+h^*(t,\ Ky)K^{*-1}(t)y), \tag{2.9}$$

где

$$C(t)=-\frac{1}{2}(K^{-1}(t)P(t)+P^*(t)K^{*-1}(t)),$$

а y_σ $(\sigma=1,\ldots,n)$ — элементы столбцевой матрицы y.

В соответствии с (2.8) производная от положительно определенной функции (2.7) по t, вычисленная в силу уравнений (2.9), равна

$$\frac{dV(t,\ x)}{dt}=2\left[\sum_{\sigma=1}^{n}\operatorname{Re}\lambda_\sigma(t)|y_\sigma|^2+y^*C(t)y+\frac{1}{2}(y^*K^{-1}(t)h(t,\ Ky)+\right.$$

$$\left.+h^*(t,\ Ky)K^{*-1}(t)y)\right].$$

Это равенство может быть переписано в виде

$$\frac{1}{2}\frac{dV(t,\ x)}{dt}=y^*A(t)y+\frac{1}{2}(y^*K^{-1}(t)h(t,Ky)+h^*(t,Ky)K^{*-1}(t)y), \tag{2.10}$$

где для $a_{s\sigma}(t)$ и $c_{s\sigma}(t)$, являющихся соответственно элементами эрмитовых матриц $A(t)$ и $C(t)$, выполняется равенство

$$a_{s\sigma}(t)=\begin{cases}c_{s\sigma}(t) & \text{при } s\neq\sigma,\\ c_{\sigma\sigma}(t)+\operatorname{Re}\lambda_\sigma(t) & \text{при } s=\sigma.\end{cases} \tag{2.11}$$

Учитывая (2.2), покажем, что при достаточно малых $\|y\|$ величина матрицы $h(t,\ Ky)$ в (2.10) не влияет на знакоопределенность функций $\frac{dV(t,\ x)}{dt}$, за исключением случая, когда на интервале $[t_0,\ T)$ эрмитова форма $y^*A(t)y$ тождественно равна нулю.

Действительно, так как

$$\|x\|\leqslant\|K(t)\|\,\|y\|\to 0 \quad \text{при} \quad y\to 0$$

имеем

$$\frac{h(t,Ky)}{\|y\|}=\frac{h(t,\ x)\|K(t)\|}{\|K(t)\|\,\|y\|}\leqslant\frac{h(t,\ x)}{\|x\|}\|K(t)\|\to 0 \quad \text{при } y\to 0. \tag{2.12}$$

Полагая $G(t)=K^{-1}(t)$, обозначив через $\nu_1(t),\ldots,\nu_n(t)$ характеристические числа эрмитовой формы $y^*A(t)y$ в (2.10), сформулируем условия устойчивости и неустойчивости невозмущенного движения на заданном интервале времени $[t_0,\ T)$ по отношению к области предельных отклонений

$$(K^{-1}(t)x,\ K^{-1}(t)x)\leqslant\eta^2. \tag{2.13}$$

Теорема 1. *Для того, чтобы невозмущенное движение,* *представленное тривиальным решением уравнения* (2.1), *было равномерно устойчивым на интервале* $[t_0, T)$ *по отношению к области* (2.13) *при произвольных* $h(t, x)$, *удовлетворяющих условию* (2.2), *необходимо, чтобы для всех* $t_* \in [t_0, T)$ *выполнялось условие*

$$\max_j [c_{sj}(t_*) + \mathrm{Re}\,\lambda_j(t_*)] < 0, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{2.14}$$

Докажем от противного. Будем предполагать, что невозмущенное движение равномерно устойчиво на интервале $[t_0, T)$ при любой матрице $h(t, x)$, удовлетворяющей условию (2.2), и при этом существует такое $t_* \in [t_0, T)$, при котором не выполняется условие (2.14). В силу известной формулы, которой выражается оценка сверху любого из диагональных элементов матрицы произвольной эрмитовой формы, имеем

$$\max_s \nu_s(t_*) \geq \max_j [c_{sj}(t_*) + \mathrm{Re}\,\lambda_j(t_*)], \quad s = 1, \ldots, n. \tag{2.15}$$

Это условие указывает, что среди $\nu_1(t), \ldots, \nu_n(t)$ имеется при $t = t_*$ по крайней мере одно положительное или нулевое. Пусть, например, $\nu_s(t_*) > 0$. В силу предположения равномерной устойчивости, невозмущенное движение будет устойчиво на интервале $[t_*, T)$. Введем обозначение

$$z = B^*(t)y, \quad (z = z(t)) \tag{2.16}$$

где $B(t)$ — унитарная матрица, приводящая матрицу $A(t)$ к диагональному виду, а z — столбцовая матрица порядка n.

Рассмотрим частное решение $x^0(t) = K(t)y^0(t) = K(t)B(t)z^0(t)$, где $t \in [t_*, T)$, определяемое начальными условиями: $z_s(t_*) = \varrho$, $z_\sigma(t_*) = 0$ $(s \neq \sigma)$. Тогда эрмитова форма $y^*A(t)y$ при $t = t_*$ имеет вид

$$y^*A(t_*)y = \nu_s(t_*)\varrho^2,$$

т. е. принимает только положительные значения. Из (2.10) и (2.12) видно, что при достаточно малых $\|y\|$ в точке $t = t_*$, а по непрерывности в пределах некоторого конечного промежутка $[t_*, t_* + \Delta t] \in [t_*, T)$, $\dfrac{dV(t, x)}{dt} > 0$, что приводит к выполнению неравенства

$$V(t, x^0(t)) > V(t_*, x^0(t_*)), \quad t \in [t_*, T). \tag{2.17}$$

Это означает, что условие устойчивости невозмущенного движения по отношению к области (2.13) на интервале $[t_*, T)$ и, следовательно, условия равномерной устойчивости на интервале $[t_0, T)$ не выполняются. При наличии хотя бы одного нулевого характеристического числа в момент $t = t_*$, поведение интегральных кривых на некотором интервале $[t_*, t_* + \Delta t]$ определится знаком функции $y^*K^{-1}(t)h(t, Ky) + h^*(t, Ky)K^{*-1}(t)y$ в уравнении (2.10), поскольку эрмитова форма $y^*A(t)y$ в момент $t = t_*$ будет равна нулю. Тогда, в зависимости от свойств нелинейных членов при $t=t_0$, а по непрерывности и в пределах некоторой окрестности точки t_0 может выполняться условие (2.17). Теорема доказана.

Следствие. Если для элементов матрицы эрмитовой формы $y^*A(t)y$ в (2.10) на интервале $[t_0, T)$ выполняется условие

$$\min_t \Big[|a_{ss}(t)| - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq s}}^{n} |a_{sk}(t)| \Big] > 0, \quad s=1, \ldots, n, \tag{2.18}$$

то условие (2.14) теоремы 1 необходимо и достаточно для того, чтобы невозмущенное движение было равномерно устойчивым по отношению к области (2.13) на интервале $[t_0, T)$.
Доказательство очевидно, поскольку в силу условия (2.18) матрица эрмитовой формы $y^*A(t)y$ является матрицей типа Адамара. Следовательно, выполнение условия (2.14) для всех $t^* \in [t_0, T)$ достаточно для того, чтобы эрмитова форма была отрицательно определенной на интервале $[t_0, T)$.

Замечание. Для приложений к решению прикладных задач в качестве необходимого условия равномерной устойчивости на заданном интервале $[t_0, T)$ можно предложить следующее:

$$\sup_t [\max(c_{ss}(t) + \mathrm{Re}\lambda_s(t)] < 0, \tag{2.19}$$

где $t_0 \leq t < T$, $s=1, \ldots, n$; поскольку выполнение (2.14) влечет за собой выполнение условия (2.19).

Теорема 2. *Для того, чтобы невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения* (2.1)) *было равномерно устойчивым на интервале* $[t_0, T)$ *по отношению к заданной на этом интервале области* (2.13), *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $t^* \in [t_0, T)$ *выполнялось условие*

$$\int_{t_0}^{T} \max \gamma_s(t)\, dt < 0, \quad s=1, \ldots, n. \tag{2.20}$$

Необходимость выполнения условия (2.20) вытекает из (2.14), (2.15) и рассуждений, приведенных в ходе доказательства теоремы 1. Докажем достаточность. Интегрируя (2.9) вдоль решения уравнения возмущенного движения на интервале $[t_0, T)$, получим

$$\|y(t)\| = \|y(t_0)\| \exp \int_{t_0}^{t} \Big[\frac{y^*A(t)y}{\|y\|^2} + \frac{1}{2\|y\|^2} (y^*K^{-1}(t)h(t, Ky) +$$
$$+ h^*(t, Ky)K^{*-1}(t)y) \Big] dt.$$

Возведя обе части равенства в квадрат и учитывая (2.7), можно записать

$$V(t,x(t))=V(t_*,x(t_*))\exp 2\int\limits_{t_*}^{T}\Big[\frac{y^*A(t)y}{|y|^2}+\frac{1}{2|y|^2}(y^*K^{-1}(t)h(t,Ky)+$$

$$+h^*(t,Ky)K^{*-1}(t)y)\Big]dt$$

(2.21)

Как известно

$$\frac{y^*A(t)y}{|y|^2}\leqslant\max\nu_\sigma(t),\quad \sigma=1,\ \ldots,\ n. \tag{2.22}$$

Из (2.12), (2.21) и (2.22) нетрудно видеть, что при достаточно малых $|y|$ выполняется неравенство

$$V(t,\ x(t))\leqslant V(t_*,\ x(t_*))\exp 2\int\limits_{t_*}^{T}\max\nu_\sigma(t)dt.$$

Отсюда следует, что при выполнении условия (2.20) имеет место

$$V(t,\ x(t))\leqslant V(t_*,\ x(t_*)). \tag{2.23}$$

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. В качестве достаточного условия устойчивости невозмущенного движения в смысле приведенного выше определения можно предложить следующее:

$$\sup|\max_\sigma\nu_\sigma(t)|<0, \tag{2.21}$$

где $t_0\leqslant t<T$, $\sigma=1,\ \ldots,\ n$; так как условие (2.20) подтверждает достаточность выполнения (2.21) для устойчивости тривиального решения уравнения (2.1)

Т е о р е м а 3. *Если в какой-либо момент $t_*\in[t_0,\ T)$ выполняется условие*

$$\int\limits_{t_*}^{T}\max\nu_\sigma(t)dt>0,\quad \sigma=1,\ \ldots,\ n, \tag{2.25}$$

то невозмущенное движение (тривиальное решение уравнения (2.1)) не может быть равномерно устойчивым на интервале $[t_0,\ T)$ по отношению к заданной на этом интервале области (2.13).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть невозмущенное движение на интервале $[t_0,\ T)$ равномерно устойчиво по отношению к области (2.13) и при $t=t_*$ выполняется условие (2.25). Тогда, в силу предположения равномерной устойчивости, невозмущенное движение будет устойчиво на интервале $[t_*,\ T)$.

Учитывая (2.4) и (2.16), рассмотрим частное решение $x^0(t)=K(t)y^0(t)=$ $=K(t)B(t)z^0(t)$, при $t\in[t_*,\ T)$ определяемое начальными условиями: $z_s(t_*)=\varepsilon$, $z_\sigma(t_*)=0$, $(s\neq\sigma)$. Не нарушая общности будем предполагать, что

$$\nu_s(t_*) = \max_\nu \nu_\nu(t_*), \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Тогда эрмитова форма $y^* A(t) y$ в точке $t = t_*$, а по непрерывности и в пределах некоторого конечного промежутка $[t_*, t_* + \Delta t] \in [t_*, T)$ принимает только положительные значения.

Из (2.21) имеем

$$V(t, x^0(t)) = V(t_*, x^0(t_*)) \exp 2 \int_{t_*}^{t_*+\Delta t} \left[\frac{y^* A(t) y}{|y|^2} + \frac{1}{2|y|^2} (y^* K^{-1}(t) h(t, Ky) + \right.$$

$$\left. + h^*(t, Ky) K^{*-1}(t) y) \right] dt.$$

Отсюда следует, что при достаточно малых $|y|$ выполняется условие (2.17). Теорема доказана.

3. В качестве приложения рассмотрим устойчивость автомобиля с недостаточной поворачиваемостью на заданном интервале $[t_0, T)$, движущегося в горизонтальной плоскости с переменной скоростью по некоторой кривой так, что определено изменение положения управляемых колес во времени $\Theta = f(t)$, $t \in [t_0, T)$. Будем предполагать, что угол Θ остается достаточно малым, а водитель поворачивает рулевое колесо в соответствии с заданной программой, не реагируя на возмущение, которым подвергаются боковая скорость v_y и угловая скорость ω. Предполагается также, что возмущения могут возникнуть в любой момент $t_* \in [t_0, T)$. Запишем дифференциальные уравнения движения автомобиля, выведенные в работе [6]

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{a^2 k_A + b^2 k_B}{Iv} \omega + \frac{a k_A - b k_B}{Iv} v_y + \frac{a k_A \Theta}{I},$$

$$\frac{d v_y}{dt} = \left(v + \frac{a k_A - b k_B}{Mv} \right) \omega - \frac{k_A + k_B}{Mv} v_y - \frac{k_A \Theta}{M}, \qquad (3.1)$$

где

ω — угловая скорость автомобиля при вращении его вокруг вертикальной оси, проходящей через центр инерции автомобиля, (*рад/сек*);

v_y — проекция скорости центра инерции автомобиля на направление, перпендикулярное продольной оси автомобиля (*м/сек*), (боковая скорость);

v — скорость автомобиля (вдоль продольной оси) (*м/сек*);

Θ — угол поворота передних колес от нейтрального положения (*рад*);

a — расстояние от центра инерции автомобиля до передней оси (*м*);

b — то же, до задней оси (*м*);

M — масса автомобиля (*кгсек*^{2}/*м*);

I — момент инерции автомобиля относительно оси z (*кгмсек*^{2});

k_A — коэффициент сопротивления передней оси уводу (*кГ/рад*);

k_B — то же, задней оси (*кГ/рад*).

Обозначая возмущения скоростей ω и v_y соответственно через $\Delta\omega$ и Δv_y, запишем уравнения возмущенного движения автомобиля:

$$\frac{d\Delta\omega}{dt} = -\frac{a^2k_A + b^2k_B}{Iv}\Delta\omega + \frac{ak_A - bk_B}{Iv}\Delta v_y; \tag{3.2}$$

$$\frac{d\Delta v_y}{dt} = \left(v + \frac{ak_A - bk_B}{Mv}\right)\Delta\omega - \frac{k_A + k_B}{Mv}\Delta v_y.$$

Так как скорость автомобиля переменна, система (3.2) представляет собой систему уравнений возмущенного движения с переменными коэффициентами вида:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

где

$$u_{11}(t) = -\frac{a^2k_A + b^2k_B}{Iv}; \qquad u_{12}(t) = \frac{ak_A - bk_B}{Iv};$$

$$u_{21}(t) = v + \frac{ak_A - bk_B}{Mv}; \qquad u_{22}(t) = -\frac{k_A + k_B}{Mv};$$

$$x_1 = \Delta\omega; \quad x_2 = \Delta v_y.$$

Тогда собственные значения матрицы

$$U(t) = \begin{pmatrix} u_{11}(t) & u_{12}(t) \\ u_{21}(t) & u_{22}(t) \end{pmatrix}$$

можно представить в виде

$$\lambda_1(t) = \frac{u_{11}(t) + u_{22}(t) + l(t)}{2}; \tag{3.4}$$

$$\lambda_2(t) = \frac{u_{11}(t) + u_{22}(t) - l(t)}{2},$$

где $l(t) = \sqrt{(u_{11}(t) - u_{22}(t))^2 + 4u_{12}(t)u_{21}(t)}$.

Используя метод, приведенный в [3], определим соответствующие собственные векторы матрицы $U(t)$

$$K_1(t) = \begin{pmatrix} u_{12}(t) \\ \dfrac{u_{22}(t) - u_{11}(t) + l(t)}{2} \end{pmatrix}; \qquad K_2(t) = \begin{pmatrix} u_{12}(t) \\ \dfrac{u_{22}(t) - u_{11}(t) - l(t)}{2} \end{pmatrix}.$$

Зададим функцию $V(t, x)$ в (2.3) посредством матрицы

$$K(t) = (K_1(t)K_2(t)) = \begin{pmatrix} u_{12}(t) & \vdots & u_{12}(t) \\ \dfrac{u_{22}(t) - u_{11}(t) + l(t)}{2} & \vdots & \dfrac{u_{22}(t) - u_{11}(t) - l(t)}{2} \end{pmatrix}.$$

Выбранная таким образом матрица $K(t)$ приводит матрицу $U(t)$ к диагональному виду. Как было указано выше, в этом случае для матрицы $P(t)$ из (2.5) справедливо равенство

$$P(t)=\frac{dK(t)}{dt}.$$

Тогда из (2.9) имеем

$$C(t)=-\frac{1}{2}\left(K^{-1}(t)\frac{dK(t)}{dt}+\frac{dK^{*}(t)}{dt}K^{*-1}\right). \tag{3.6}$$

Подставив (3.5) в (3.6), для элементов матрицы эрмитовой формы $y^{*}C(t)y$ в (2.9) имеем

$$c_{11}(t)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\frac{1}{l(t)}\frac{d(u_{11}(t)-u_{22}(t))}{dt}-\frac{u_{11}(t)-u_{22}(t)}{u_{22}(t)l(t)}\frac{du_{12}(t)}{dt}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{u_{12}(t)}\frac{du_{12}(t)}{dt}-\frac{1}{l(t)}\frac{dl(t)}{dt}\right];$$

$$c_{22}(t)=\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left[\frac{u_{11}(t)-u_{22}(t)}{u_{22}(t)l(t)}\frac{du_{12}(t)}{dt}-\frac{1}{l(t)}\frac{d(u_{11}(t)-u_{22}(t))}{dt}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{u_{12}(t)}\frac{du_{12}(t)}{dt}-\frac{1}{l(t)}\frac{dl(t)}{dt}\right];$$

$$c_{12}(t)=\frac{1}{2}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{1}{l(t)}\frac{dl(t)}{dt}-\frac{1}{u_{12}(t)}\frac{du_{12}(t)}{dt}\right]+i\operatorname{Im}\left[\frac{1}{l(t)}\frac{d(u_{11}(t)-u_{22}(t))}{dt}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{u_{11}(t)-u_{22}(t)}{u_{12}(t)l(t)}\frac{du_{12}(t)}{dt}\right]\right\};$$

$$c_{21}(t)=\frac{1}{2}\left\{\operatorname{Re}\left[\frac{1}{l(t)}\frac{dl(t)}{dt}-\frac{1}{u_{12}(t)}\frac{du_{12}(t)}{dt}\right]-i\operatorname{Im}\left[\frac{1}{l(t)}\frac{d(u_{11}(t)-u_{22}(t))}{dt}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{u_{11}(t)-u_{22}(t)}{u_{12}(t)l(t)}\frac{du_{12}(t)}{dt}\right]\right\}.$$

Используя полученные выражения (3.4) и (3.7), на числовом примере проиллюстрируем применение приведенных в статье условий равномерной устойчивости невозмущенного движения для случая, когда возмущенное движение описывается уравнениями (3.3).

Пусть автомобиль, имеющий параметры: $k_A=k_B=4000$ *кГ/рад*; $a=1{,}2$ *м*; $b=1{,}8$ *м*; $M=200$ *кгсек²/м*; $I=200$ *кгмсек²*,—разгоняется в течение 5 *сек* от скорости $v_0=10$ *м/сек* до $v=14$ *м/сек*. Тогда расчеты, проведенные на ЭВМ, приводят к результатам, сведенным в табл. 1.

Из таблицы следует, что для элементов эрмитовых матриц $C(t)$ и $A(t)$ на рассматриваемом интервале времени выполняются соответственно условия (2.14) и (2.18). Таким образом, используя следствие теоремы 1,

Таблица 1

t, сек	0	1	2	3	4	5
$c_{11}(t)$	0,0184	0,0930	−0,0122	0,0189	0,0255	0,0003
$c_{22}(t)$	0,0724	0,0963	−0,0122	0,0189	0,0255	0,0003
$\mathrm{Re}\,c_{12}(t) = \mathrm{Re}\,c_{21}(t)$	0,0369	0,0037	0,0810	0,0451	0,0383	0,0312
$\mathrm{Im}\,c_{12}(t) = -\mathrm{Im}\,c_{21}(t)$	0	0	0,1327	0,0671	0,0467	0,0358
$\mathrm{Re}\,\lambda_1(t)$	−3,9860	−4,1412	−4,8950	−4,5806	−4,3030	−4,0571
$\mathrm{Re}\,\lambda_2(t)$	−7,3750	−6,3773	−4,8950	−4,5806	−4,3035	−4,0571
$a_{11}(t)$	−3,9676	−4,0482	−4,9072	−4,5617	−4,2775	−4,0568
$a_{22}(t)$	−7,3026	−6,2810	−4,9072	−4,5617	−4,2775	−4,0568

можно утверждать, что тривиальное решение уравнения (3.3) на заданном интервале времени устойчиво.

ЕрГУ им. К. Маркса Поступило 12.I.1973

Ս. Թ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՏՐՎԱԾ ԺԱՄԱՆԱԿԱՄԻՋՈՑՈՒՄ ՇԱՐԺՄԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇ ՊԱՅՄԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում բերված է տրված (վերջավոր) ժամանակամիջոցում շարժման կայունության սահմանումը [1] և տրվում են չգրգռված շարժման կայունության և անկայունության պայմանները ու այդ պայմանների ստացման ալգորիթմը։ Ստացված արդյունքները կիրառվում են փոփոխական արագությամբ շարժվող ավտոմեքենայի կայունության խնդրում՝ երբ ավտոդողերն ունեն կողմնային առաձգականություն։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абгарян К. А.* Лекции по теории устойчивости. М., 1972.
2. *Абгарян К. А.* Об устойчивости движения на конечном промежутке времени. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.
3. *Абгарян К. А.* Приведение квадратной матрицы к диагональному виду и разложение ее на составляющие. «Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук», 1965, т. 18, № 2.
4. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения на конечном интервале времени. ПММ, 1953, т. 17, вып. 5.
5. *Лебедев А. А.* Об устойчивости движения на заданном интервале времени. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
6. *Певзнер Я. М.* Теория устойчивости автомобиля. М., Машгиз, 1947.