

МАШИНОСТРОЕНИЕ

К. Х. ШАХБАЗЯН, Г. О. ОГАНЕСЯН

СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА  
 ПО ПОЛОЖЕНИЯМ ОСИ ШАТУНА

В статье впервые дается решение задачи синтеза пространственного четырехзвенника по пяти положениям оси шатуна. Рассматривается синтез кривошипного механизма с вращательными парами на его концах и ведомым звеном, обладающим двумя шаровыми шарнирами (рис. 1). Данный механизм имеет две степени свободы, но одна из них представляет вращение ведомого звена относительно общей оси двух его шаровых шарниров и не влияет на положение оси шатуна. Поэтому вторая степень свободы не учитывается.

Методика синтеза пространственных механизмов такого типа, воспроизводящих произвольные заданные пространственные кривые, представлена в работе Тулла [1], а управлению перемещением твердого тела посвящена работа Су [2]. С математической точки зрения задачи синтеза по заданным направлениям оси шатуна представляют собой интерполяционные задачи с заранее заданными узлами интерполяции. Для плоских механизмов подобные задачи различными методами решены рядом авторов [3-7].

**Постановка задачи.** Рассмотрим пространственный механизм  $O_1ABCD$  (рис. 1). Система координатных осей  $Oxyz$  связана со стойкой. Кривошип  $AB$  образует со стойкой первую вращательную пару, ось которой направлена вдоль оси  $Oy$ . Шатун  $BC$  образует с кривошипом  $AB$  вторую вращательную пару  $B$ . Оси вращательных пар скрещиваются. Коромысло  $CD$  образует сферические пары с шатуном и со стойкой.

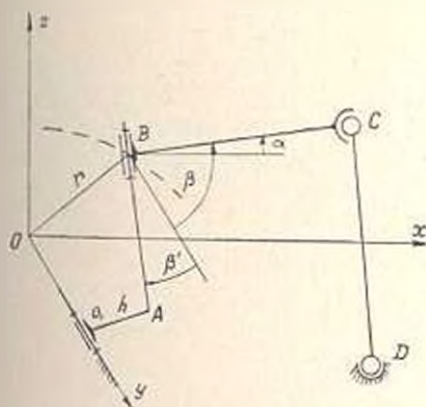


Рис. 1.

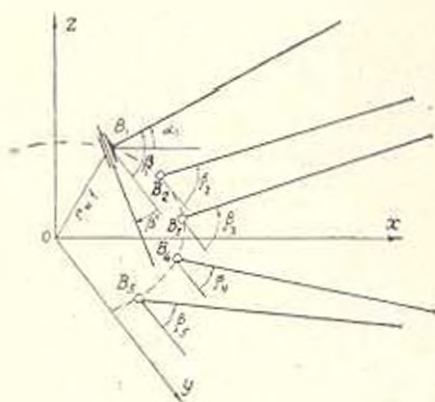


Рис. 2.

Задача синтеза указанного четырехзвенника рассматривается при следующих условиях:

а) заданы направления оси шатуна, ограниченные с одной стороны, находящейся на окружности, расположенной в плоскости  $xOz$ ;

б) дан угол  $\beta'$  между двумя скрещивающимися прямыми  $AB$  и  $Oy$ ;

в) углы наклона оси шатуна  $\alpha$  и  $\beta$  относительно координатных осей  $Ox$  и  $Oy$  заданы только для одного ее положения, а для остальных ее положений задан только  $\beta_i$  — угол наклона к оси  $Oy$  (рис. 2).

При  $OB = r$  координаты точки  $B$  определяются из условия

$$B_x^2 + B_z^2 = r^2. \quad (1)$$

При выборе координат точки  $B$  необходимо, чтобы выполнялось одно из условий:

$$\left. \begin{array}{l} B_{x_1} > B_{x_2} > \dots > B_{x_n} \quad (B_{x_1} < B_{x_2} < \dots < B_{x_n}) \\ B_{z_1} > B_{z_2} > \dots > B_{z_n} \quad (B_{z_1} < B_{z_2} < \dots < B_{z_n}) \end{array} \right\}. \quad (2)$$

и не нарушалась требуемая последовательность занимаемых положений оси шатуна.

Имея координаты точки  $B$ , углы наклона оси шатуна относительно осей  $Ox$  и  $Oy$  и угол  $\beta'$ , определяем кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми

$$h = \frac{|B_x \cos \alpha' - B_z \cos \alpha'|}{\sqrt{1 - \cos^2 \beta'}}. \quad (3)$$

где  $\alpha'$  и  $\alpha''$  — углы наклона оси  $AB$  относительно осей  $Ox$  и  $Oz$ .

Имея  $h$  и  $\beta'$ , можем определить углы наклона  $\alpha'_i$ ,  $\alpha''_i$  и  $\beta'_i$  прямых  $AB$  и  $BC$  относительно осей  $Ox$  и  $Oz$  по формулам

$$\left. \begin{array}{l} h \sin \beta' = B_{x_i} \cos \alpha'_i - B_{z_i} \cos \alpha''_i; \\ \cos^2 \alpha'_i + \cos^2 \beta'_i - \cos^2 \alpha''_i = 1; \end{array} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \cos \alpha'_i \cos \alpha'_i + \cos \beta'_i \cos \beta'_i + \cos \alpha''_i \cos \alpha''_i = 0; \\ \cos^2 \alpha'_i + \cos^2 \beta'_i + \cos^2 \alpha''_i = 1. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Имея координаты точки  $B$  и углы наклона оси шатуна относительно координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ , определяем координаты точки  $C$ , выраженные через координаты точки  $B$  и искомую длину шатуна  $l$ :

$$\left. \begin{array}{l} C_{x_i} = B_{x_i} + l \cos \alpha'_i; \\ C_{y_i} = B_{y_i} + l \cos \beta'_i; \\ C_{z_i} = B_{z_i} + l \cos \alpha''_i. \end{array} \right\} \quad (6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

где  $B_{y_i} = 0$ , а  $n$  — число заданных направлений оси шатуна.

Центр вращения точки  $C$  находится в плоскости, перпендикулярной к отрезкам между точками  $C_i$ . Геометрическое место центров кривизны двух положений точки  $C_i$  есть плоскость, уравнение которой будет:

$$(C_{xi} - C_{xi-1})(2x - C_{xi} - C_{xi-1}) + (C_{yi} - C_{yi-1})(2y - C_{yi} - C_{yi-1}) + \\ + (C_{zi} - C_{zi-1})(2z - C_{zi} - C_{zi-1}) = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad (7)$$

Число уравнений (7) будет на единицу меньше числа заданных уравнений оси шатуна. Уравнения (7) позволяют произвести синтез данного механизма по пяти направлениям оси шатуна.

**Синтез по пяти направлениям оси шатуна.** Пусть требуется проектировать пространственный четырехзвенник, для которого ось шатуна принимает последовательно заданные пять направлений (рис. (2)).

Выбирая  $r = OB, B', B_2, B_3, B_4$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ) и определяя амплитуды и углы  $\alpha_i, \gamma_i$  из уравнений (1) и (5), по уравнениям (6) вычисляем координаты точки  $C$ , выраженные через неизвестную длину шатуна. Уравнения плоскостей, на которых лежит центр вращения коромысла, принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} (A_1 - B_1)x + D_1y + (E_1 - F_1)z - N_1 &= 0; \\ (A_2 - B_2)x + D_2y + (E_2 - F_2)z - N_2 &= 0; \\ (A_3 - B_3)x + D_3y + (E_3 - F_3)z - N_3 &= 0; \\ (A_4 - B_4)x + D_4y + (E_4 - F_4)z - N_4 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A_{i-1} &= B_{xi} - B_{xi-1}; & B_{i-1} &= \cos \alpha_i - \cos \alpha_{i-1}; \\ D_{i-1} &= \cos \beta_i - \cos \beta_{i-1}; \\ E_{i-1} &= B_{zi} - B_{zi-1}; & F_{i-1} &= \cos \gamma_i - \cos \gamma_{i-1}; \\ N_{i-1} &= B_{xi-1} \cos \alpha_{i-1} + B_{zi-1} \cos \gamma_{i-1} - B_{xi} \cos \alpha_i - \\ &- B_{zi} \cos \gamma_i, & i &= 2, 3, 4, 5 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Здесь и в дальнейшем двойной знак соответствует расположению точки  $C$  относительно точки  $B$  влево и вправо.

Определяя из первых трех уравнений системы (8) координаты  $x, y, z$ , выраженные через  $l$ , и подставляя в четвертое уравнение, получим:

$$kl^2 + ml + n = 0; \quad (10)$$

$$l_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4nk}}{2k}.$$

где

$$\begin{aligned}
k &= B_1 E_1 + D_1 (B_2 F_{IV} + B_3 F_{II} + B_4 F_{III}) - F_1 B_1 - N_1 (B_2 D_{III} + B_3 D_{IV} + B_4 D_{II}); \\
m &= A_1 F_1 + B_1 E_1 + D_1 (A_2 F_{IV} + A_3 F_{II} + A_4 F_{III}) + B_2 E_{IV} + B_3 E_{II} + B_4 E_{III} - \\
&\quad - F_1 A_1 - E_1 B_1 - N_1 (A_2 D_{III} + A_3 D_{IV} + A_4 D_{II}) + B_2 E'_{IV} + B_3 E'_{II} + B_4 E'_{III}; \\
n &= A_1 E_1 + D_1 (A_2 E_{IV} + A_3 E_{II} + A_4 E_{III}) - E_1 A_1 - N_1 (A_2 E'_{IV} + A_3 E'_{II} + A_4 E'_{III}).
\end{aligned}
\tag{11}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= A_2 N_{III} + A_3 N_{IV} + A_4 N_{II}; & B_1 &= B_2 N_{III} + B_3 N_{IV} + B_4 N_{II}; \\
E_1 &= E_2 N_{III} + E_3 N_{IV} + E_4 N_{II}; & F_1 &= F_2 N_{III} + F_3 N_{IV} + F_4 N_{II};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{II} &= D_2 F_3 - D_3 F_2; & E_{II} &= E_2 N_1 - E_3 N_2; \\
D_{III} &= D_3 F_1 - D_1 F_3; & E_{III} &= E_3 N_2 - E_2 N_3; \\
D_{IV} &= D_4 F_2 - D_2 F_1; & E_{IV} &= E_4 N_3 - E_3 N_1; \\
E_{II} &= E_2 D_4 - E_4 D_2; & F_{II} &= F_2 N_1 - F_3 N_2; \\
E_{III} &= E_3 D_2 - E_2 D_3; & F_{III} &= F_3 N_2 - F_2 N_3; \\
E_{IV} &= E_4 D_3 - E_3 D_4; & F_{IV} &= F_4 N_3 - F_3 N_4;
\end{aligned}$$

$$N_{II} = N_2 D_3 - N_3 D_2;$$

$$N_{III} = N_3 D_4 - N_1 D_2;$$

$$N_{IV} = N_1 D_2 - N_2 D_4.$$

После определения  $I$  вычисляем координаты

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}, \tag{12}$$

где  $\Delta$  — определитель первых трех уравнений системы (8):

$\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$  — дополнительные определители.

*Пример вычисления пяти параметров.* Пусть заданы:  $r=1$ ;  $\beta' = 40^\circ 51' 07''$ ;  $\beta_1 = 80^\circ 47' 13''$ ;  $\beta_2 = 76^\circ 39' 42''$ ;  $\beta_3 = 70^\circ 31' 52''$ ;  $\alpha_1 = 45^\circ 29' 34''$ ;  $\alpha_2 = 67^\circ 36' 32''$ ;  $\alpha_3 = 70^\circ 14' 41''$ .

Выбрав абсциссы точки  $B$  и учитывая условия (2), определяем по формуле (1) аппликаты  $B_z$ . Их значения и значения направляющих косинусов: прямых  $AB$  и  $BC$  сведены в табл. 1, а значения коэффициентов в табл. 2.

Таблица 1

| Положе-<br>ния | $A_x$ | $A_z$    | $\cos \alpha'$ | $\cos \beta'$ | $\cos \gamma'$ | $\cos \alpha$ | $\cos \beta$ | $\cos \gamma$ |
|----------------|-------|----------|----------------|---------------|----------------|---------------|--------------|---------------|
| 1              | 1     | -1       | 0.53339        | 0.75640       | 0.34874        | 0.36030       | 0.16010      | -0.91899      |
| 2              | 0.4   | -0.91652 | 0.36769        | 0.75640       | 0.54098        | 0.62394       | 0.23070      | -0.74665      |
| 3              | 0.8   | 0.6      | 0.05304        | 0.75640       | 0.62958        | 0.81770       | 0.33330      | -0.46933      |
| 4              | 0.8   | 0.6      | -0.61103       | 0.75640       | 0.23347        | 0.70100       | 0.28000      | 0.60349       |
| 5              | 0.4   | 0.91652  | -0.64669       | 0.75640       | -0.09827       | 0.25780       | 0.33800      | 0.90515       |

Таблица 2

| Положе-<br>ние | A   | B       | D       | E       | F       | N        |
|----------------|-----|---------|---------|---------|---------|----------|
| 1              | 0,4 | 0,26363 | 0,07060 | 0,08449 | 0,17235 | -0,01489 |
| 2              | 0,4 | 0,19376 | 0,10260 | 0,31652 | 0,27741 | -0,00119 |
| 3              | 0   | 0,11670 | 0,04670 | 1,20000 | 1,07282 | 0,01287  |
| 4              | 0,4 | 0,44320 | 0,04200 | 0,31652 | 0,39166 | 0,00981  |

Из выражений (11) имеем:  $k = 0,55847$ ;  $m = 0,93912$ ;  $n = 0,38194$ .

Подставляя полученные значения  $k$ ,  $m$  и  $n$  в уравнение (10), получим:  
 $l_1 = -0,70791$ ;  $l_2 = -0,97367$ .

Далее, по формулам (12) определяем координаты  $x$ ,  $y$  и  $z$  центр вращения коромысла:

$$x_1 = -0,31499; \quad x_2 = -0,12843;$$

$$y_1 = -1,12993; \quad y_2 = 0,19933;$$

$$z_1 = -0,00510; \quad z_2 = 0,11620.$$

Наконец, из уравнений (9) определяем длину коромысла  $R$ :

$$R_1 = 1,07510; \quad R_2 = 0,31680.$$

Полученный механизм для  $R_1$  показан на рис. 3.

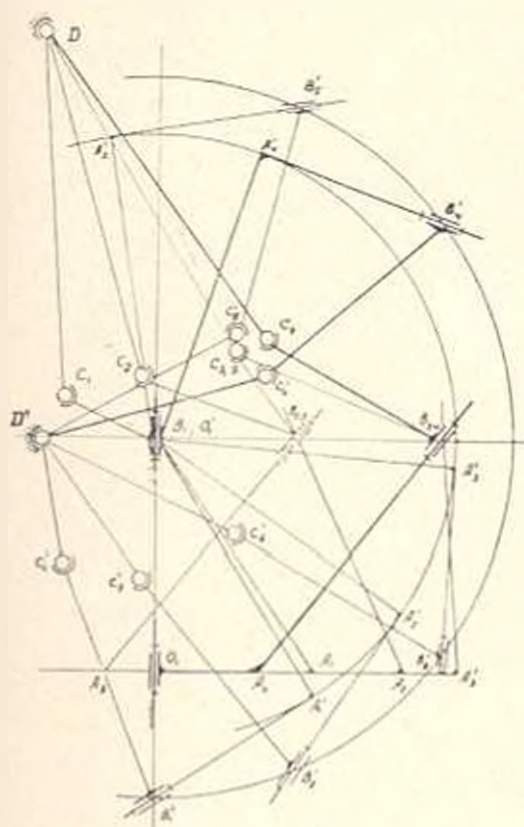


Рис. 3.

В заключение отметим, что в формуле (8) и далее нет необходимости двойных знаков, поскольку квадратные уравнения относительно длины шатуна стачаются только знаком при  $l$ .

Երևանский государственный  
университет

Поступило 13.VI.1972.

Կ. Մ. ՄԱԽՉԱԺՅԱՆ, Դ. Օ. ՕՂԱՆՅԱՆ

ՏԱՐԺԱՅԻՆԱՆ ԲԱԹՈՂԱՆ ԴԵՆԱՆԶՈՒ ՍԻՆԹԵԶ ԸՍՏ ՇԱՐԺԱՔԵՐԻ  
ԱՌԱՆՑՔԻ ԳԻՐՔՆԵՐԻ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հոգվածում տրված է տարածական բառադակ մեխանիզմի (պտտման-պտտման-գնդային-գնդային ղույզերով) սինթեզը բառ շարժաձևի առանցքի հինգ զիրքերի: Շարժաձևի առանցքի տրված հինգ զիրքերի ղեկըրում ստացվում է բառադակի հափառում շարժաձևի երկարություն նկատմամբ: Հոգված է թվային օրինակ:

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Դալ Մ. Пространственный кинематический синтез. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия В, № 3, 1968.
2. Ը. Проектирование пространственных механизмов для управления перемещением твердого тела. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия В, № 3, 1968.
3. Аргоболевский Н. Н., Асватский Н. Н., Черкудин С. А. Синтез плоских механизмов. Физматгиз, 1959.
4. Бейер Р. Кинематический синтез механизмов. Машгиз, 1959.
5. Дуксгехельд В. Синтез механизмов.
6. Լ. Аналитический кинематический синтез механизмов посредством конечных перемещений. Труды американского общества инженеров-механиков. Серия В, № 2, 1965.
7. Մախչաճյան Կ. Մ., Կարյան Բ. Մ. Синтез плоских механизмов по положению одной шатуна. «Изв. АН Арм. ССР, серия технических наук», № 2, 1970.