

М. А. КАРАПЕТЯН

ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИСПЕРСНОЙ СИСТЕМЕ
 ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОРИЕНТАЦИИ СФЕРОИДАЛЬНЫХ
 ВКЛЮЧЕНИЙ

Исследование электрического поля в дисперсных системах (в электрической изоляции с инородными дисперсными включениями, в воздухе с частицами твердого вещества, встречающимися в электротехнологических процессах), представляет практический интерес. Важной особенностью этого исследования является учет взаимного влияния полей поляризованных включений. Учет взаимного влияния проще осуществить в случае включений сферической формы [1], при которых отсутствует понятие ориентации частицы. В [2] задача решена для частного случая, когда все эллипсоидальные включения одинаково ориентированы относительно внешнего поля.

В настоящей работе решается общая задача: сфероидальные включения постоянной концентрации своими длинными осями ($a > b = c$) произвольно ориентированы относительно направления внешнего однородного поля.

При совершенно произвольной ориентации включений однородной концентрации в среде допустимо предположение, что вдоль каждой из осей x, y, z декартовой координатной системы ориентированы (своими длинными осями) по $1/3$ всех включений. Принятое допущение следует считать общепризнанным для подобных случаев [3].

Если вектор напряженности внешнего поля E направлен по оси x , то $1/3$ частиц (или $f/3$ по объемной концентрации) будут поляризованы вдоль оси $2a$, $2/3$ частиц (или $2f/3$) — вдоль осей $2b = 2c$ сфероидов. Здесь f — число включений в единице объема дисперсной системы; f — их объемная концентрация.

Электрические моменты поляризованных включений обеих групп p_1 и p_2 взаимно параллельны и совпадают по направлению с внешним полем. Поскольку $a \neq b = c$, то $p_1 \neq p_2$.

Исходя из вышесказанного, можно констатировать, что электрический момент единицы объема дисперсной системы, обусловленный поляризацией включений, равен

$$P = (p_1 + 2p_2) \cdot 3 \tag{1}$$

и направлен по внешнему полю.

С целью учета взаимного влияния поляризованных включений вве-

дем понятие макроскопического действующего поля E_g по аналогии с микроскопическим действующим (локальным) полем, воспользуясь методом, предложенным Лорентцем [4] для расчета сил, действующих на электрон однородной среды в электромагнитном поле. Теория микроскопического действующего поля в однородном неполярном и полярном диэлектриках приведена в [3, 5].

В дисперсной системе мысленно выделим сферу с радиусом R , удовлетворяющем неравенству $2a \ll R \ll d$, где d — расстояние между плоскими электродами, создающими внешнее однородное поле E_0 . Дисперсную систему вне этой сферы будем считать сплошным веществом с однородной поляризованностью P (1).

Напряженность поля в центре этой сферы — напряженность действующего поля — будет иметь составляющие

$$E_s = E_0 + E_1 + E_2, \quad (2)$$

где E_1 — напряженность поля, вызванная поляризованным сплошным веществом, находящимся вне сферы; E_2 — напряженность поля, обусловленная поляризованными включениями, расположенными внутри сферы.

Приступим к расчету напряженностей E_1 , E_2 . На поверхности пустой сферы накапливаются заряды, обусловленные поляризованностью P сплошного вещества. Плотность этих зарядов (рис. 1)

$$\sigma = P \cos \varphi. \quad (3)$$

Элементарный заряд кольцевой сферической поверхности с радиусом $R \sin \varphi$ и шириной $R d\varphi$

$$dq = 2\pi R^2 P \sin \varphi \cos \varphi d\varphi. \quad (4)$$

Ввиду осевой симметрии задачи, вертикальная составляющая напряженности поля зарядов сферы равна нулю.

Горизонтальная составляющая напряженности результирующего поля, вызванная зарядом сферического поверхностного кольца,

$$dE_1 = \frac{dq}{4\pi\epsilon_2 R^2} \cos \varphi. \quad (5)$$

Таким образом, поле

$$E_1 = \frac{P}{2\epsilon_2} \int_0^\pi \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{P}{3\epsilon_2} = \frac{(p_1 + 2p_2)}{9\epsilon_2}, \quad (6)$$

и направлено по внешнему полю E_0 .

Согласно (1), электрический момент dP элементарного объема dv в сферических координатах, будет

$$dP = \frac{(p_1 + 2p_2)}{3} dv = \frac{(p_1 + 2p_2)}{3} r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\psi. \quad (7)$$

Горизонтальная проекция радиальной и тангенциальной составляющих напряженностей в центре сферы (рис. 2), вызванных электрическим моментом dP , равна

$$dE_2 = -\frac{dP}{4\pi r_2^3} (2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi). \quad (8)$$

Для напряженности E_2 после интегрирования получим

$$E_2 = \frac{(\rho_1 + 2\rho_2)r}{12\pi\epsilon_2} \int \frac{dr_2}{r_2} \int d\varphi \left[4 \int_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos^2\varphi d\varphi - 2 \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi d\varphi \right] = 0. \quad (9)$$

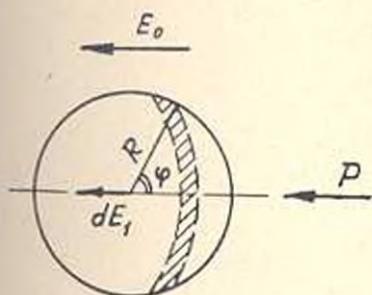


Рис. 1. К расчету напряженности поля в центре полной сферы, расположенной в однородной поляризованной среде.

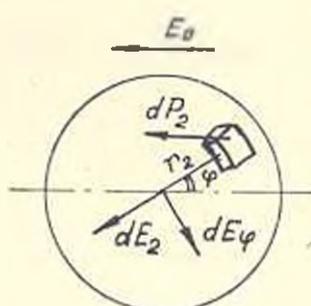


Рис. 2. К расчету напряженности поля в центре сферы, обусловленной электрическими моментами включений сферического объема.

Таким образом, действующее поле в дисперсной системе с неподвижными сфероидами включения произвольной концентрации и ориентации равно

$$E_x = E_0 + E_1 = E_0 + \frac{(\rho_1 + 2\rho_2)r}{9\epsilon_2}. \quad (10)$$

При очень малой концентрации включений $f \ll 1$ или $\nu = 1$, $E_x \approx E_0$. В этом случае, в первое мгновение наложения постоянного поля E_0 напряженности электрического поля внутри включений $E_a(0)$, $E_b(0)$ и в среде у вершин сферондов (по направлению E_0), то есть в местах с наибольшей напряженностью $E_a^*(0)$, $E_b^*(0)$, будут [6, 7]:

$$\begin{aligned} E_a(0) &= \frac{\epsilon_2 E_0}{\epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) N_a}; \\ E_c^*(0) &= \frac{\epsilon_1 E_0}{\epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) N_a}; \\ E_b(0) &= \frac{\epsilon_2 E_0}{\epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) N_b}; \\ E_c^*(0) &= \frac{\epsilon_1 E_0}{\epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2) N_b}. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — абсолютные диэлектрические проницаемости вещества включений и среды соответственно; N_a, N_b — коэффициенты дедполяризации по осям $2a$ и $2b$ [8].

Представленное уравнениями (11) поле будет электростатическим.

При заметной концентрации включений E_0 в уравнениях (11) следует заменить на E_1 из (10), тогда

$$\begin{aligned} E_a(0) &= E_0 + \frac{2 \cdot p_2(0)}{9\varepsilon_2} - \frac{(3-f)N_a}{4\pi\varepsilon_2 abc} p_1(0); \\ E_r^a(0) &= E_0 - \frac{2 \cdot p_2(0)}{9\varepsilon_2} + \frac{3-(3-f)N_a}{4\pi\varepsilon_2 abc} p_1(0); \\ E_b(0) &= E_0 - \frac{p_1(0)}{9\varepsilon_2} - \frac{(3-2f)N_b}{4\pi\varepsilon_2 abc} p_2(0); \\ E_r^b(0) &= E_0 + \frac{p_1(0)}{9\varepsilon_2} + \frac{3-(3-2f)N_b}{4\pi\varepsilon_2 abc} p_2(0). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь

$$\begin{aligned} p_1(0) &= 4\pi\varepsilon_2 abc m_1 \frac{9-2f m_2}{27 - \frac{2}{3} f^2 m_2} E_0(0); \\ p_2(0) &= 4\pi\varepsilon_2 abc m_2 \frac{9+f m_1}{27 - \frac{2}{3} f^2 m_2} E_0(0), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{3\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(3-f)N_a}, \\ m_2 &= \frac{3(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{3\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(3-2f)N_b}. \end{aligned} \quad (14)$$

Интересующие нас напряженности электрического поля, с учетом взаимного влияния поляризованных частиц, можно получить подстановкой (13) в (12), тогда

$$\begin{aligned} E_a(0) &= [(1-m_1 N_a)(1+D_2) + (1+2D_3)D_1] E_0; \\ E_r^a(0) &= [1+m_1(1+D_2) - m_1 N_a(1+D_2)] \left(1 - \frac{f}{3}\right) + (1+D_1)D_2 E_0; \\ E_b(0) &= [(1-m_2 N_b)(1+D_1) + (1+2D_1)D_2] E_0; \\ E_r^b(0) &= [1+m_2(1+D_1) - m_2 N_b(1+D_1)] \left(1 - \frac{2f}{3}\right) + (1+D_3)D_3 E_0, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$D_1 = \frac{1}{9} f m_1; \quad D_2 = \frac{2}{9} f m_2$$

Электрические моменты и напряженности в установившемся режиме могут быть определены из (13) и (15), заменяя в этих уравнениях m_1, m_2 на n_1, n_2 , где

$$\begin{aligned} n_1 &= \frac{3(\gamma_{11} - \gamma_{12})}{3\gamma_{12} + (\gamma_{11} - \gamma_{12})(3-f)N_a}; \\ n_2 &= \frac{3(\gamma_{11} - \gamma_{12})}{3\gamma_{12} + (\gamma_{11} - \gamma_{12})(3-2f)N_b} \end{aligned} \quad (16)$$

и D_1, D_2 на D'_1, D'_2 , где

$$D'_1 = \frac{1}{9} f n_1; \quad D'_2 = \frac{2}{9} f n_2.$$

В (16) через γ_{11} и γ_{12} отмечены удельные электропроводности веществ включений и среды.

Для определения переходных значений электрических моментов частиц $p_1(t)$ и $p_2(t)$ воспользуемся принципом непрерывности линий полного тока. Условия равенства плотностей полных токов напишем у одной из вершин по оси $2a$ для сфероида, ориентированного вдоль оси x и одной из вершин по оси $2b$ для сфероида, ориентированного вдоль оси y или z . В каждое из этих двух уравнений входят пары напряженностей $E_a(t), E_x^0(t)$ и $E_b(t), E_y^0(t)$, которые могут быть определены из (12), заменяя 0 буквой t . После подстановки и решения системы дифференциальных уравнений относительно $p_1(t)$ и $p_2(t)$ получаем:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{4\pi}{3} \varepsilon_2 abc n_1 E_0 [\Phi_1(t) - D'_2 \Phi_2(t)]; \\ p_2(t) &= \frac{4\pi}{3} \varepsilon_2 abc n_2 E_0 [D'_1 \Phi_1(t) + \Phi_2(t)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Phi_1(t) &= 1 - \frac{n_1 - m_1}{n_1} e^{-t/\tau_1}; \\ \Phi_2(t) &= 1 - \frac{n_2 - m_2}{n_2} e^{-t/\tau_2}; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Phi_3(t) = 1 - \frac{n_1 - m_1}{n_1} \frac{\tau_2 - t}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_1} - \frac{n_2 - m_2}{n_2} \frac{\tau_2 - t}{\tau_2 - \tau_2} e^{-t/\tau_2}$$

где

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{3\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(3-f)N_a}{3\gamma_{12} + (\gamma_{11} - \gamma_{12})(3-f)N_a}; \\ \tau_2 &= \frac{3\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(3-2f)N_b}{3\gamma_{12} + (\gamma_{11} - \gamma_{12})(3-2f)N_b}; \\ \text{и} &= \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\gamma_{11} - \gamma_{12}}. \end{aligned} \quad (19)$$

При выводе (17) D^2 пренебрежимо мало по сравнению с $\tau_1\tau_2$, а $2D\theta$ — по сравнению с $\tau_1 + \tau_2$. При любом соотношении параметров вещества среды и включений $\theta^2 \lesssim \tau_1\tau_2$ и $2\theta \lesssim (\tau_1 + \tau_2)$, между тем

$$D = \frac{2}{81} \rho^2 n_1 n_2 \ll 1.$$

Заметим, что вторые члены в знаменателях уравнений (13) также пренебрежимы по сравнению с 27.

Подставив (17) в (12), получим временные функции интересующих нас напряженностей электрического поля. Ввиду громоздкости этих выражений целесообразно подставлять в (12) числовые значения $\rho_1(t)$ и $\rho_2(t)$.

Выводы

1. Введенное понятие макроскопического действующего поля аналогично понятию микроскопического поля. Расчет этого поля в дисперсной системе выполнен для случая произвольно ориентированных, но не изменяющих свою ориентацию под действием поля, сферических включений.

2. Напряженность электрического поля и электрические моменты частиц зависят от параметров (τ, γ) среды и включений, концентрации, формы и размеров последних.

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса

Получено 23.1.1972

Մ. Ա. ԿԱՐԱՊԵՏՅԱՆ

ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ԳԱՇՏՐ ԳԻՄՊԻՐԻ ՍԻՏՏԵՄԻԻՄ ԱՅԵՐՈՒԿԱԼ ՆԵՐԱՌՈՒՄԵՆԵՐԻ
ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ԿՈՂՄՆՈՐՈՇՄԱՆ ԳԵՊԳՈՒՄ

Ս. մ. փ. ո. փ. ո. լ. մ.

Իրապէրս սխաեմում էլեկտրական դաշտի հաշվարկի առանձնահատկութիւնը կախված է բնեռացված մասնիկների էլեկտրական մոմենտների փոխադարձ ազդեցության հաշվառումից: Այդ առումով շափազանց կարևոր է ներառումների կողմնորոշումն արտաքին դաշտի նկատմամբ: Հողվածում մտցված է զործող մակրոսկոպիկ դաշտի հասկացութիւնը և կատարված է նրա հաշվարկը այն դեպքի համար, երբ բոլոր ներառումները բաժանված են երեք հավասար խմբի, որոնց մեջ մանող մասնիկներն իրենց երկար առանցքով կողմնորոշված են գեկարայան կոորդինատային առանցքների նկատմամբ: Արտաքին դաշտի ուղղութիւնը համընկնում է այդ առանցքներից մեկի հետ:

Կատարված է էլեկտրական դաշտի շարվածությունների հաշվարկ ներառումների ներսում և վերջիններիս հետ սահմանակից միջավայրում: Հաշվված են նաև մասնիկների էլեկտրական մոմենտները նշված հաշվարկները կատարված ԱՊ Գիմբ ընդունելով գործող դաշտի համար ստացված բանաձևեր:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Карапетян М. А., Арамян М. А. Синусоидальное поле в дисперсной системе со сферическими включениями. Сборник научных трудов Ереванского политехнического института, том 32, серия автоматки и вычислительной техники, вып. 111, 1971.
2. Карапетян М. А. Перераспределение постоянного поля в дисперсной системе с эллипсоидальными включениями. «Электричество», № 10, 1971.
3. Скланов Г. И. Физика диэлектриков. ГИИТЛ, 1949.
4. Лорентц Г. А. Теория электронов и ее применение к явлениям света и теплового излучения. ГИИТЛ, 1956.
5. Вавровицкий Н. Г. и др. Теория диэлектриков. Изд. «Энергия», 1965.
6. Стригтон Дж. А. Теория электромагнетизма. Гостехиздат, 1948.
7. Петушил А. В. и др. Высокочастотный нагрев диэлектриков и полупроводников. Госэнергоиздат, 1959.
8. Поппельман К. М. Теоретические основы электротехники, ч. III. Изд. «Энергия», 1969.