ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXV, № 4, 1972 Серия технических наук

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Э. Л. ОГАНЕСЯН

МЕТОД КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАРМОНИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПРИ РАСЧЕТЕ ЦЕПЕЙ СО СТАЛЬЮ

Для нахождения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих электрические цепи, широко используется метод гармонического баланса, а также эквивалентный ему, в смысле получаемого решения, метод Галеркина [1]. Менее распространен метод коллокаций. Решение уравнений ищется в форме тригонометрического полинома. При увеличении числа членов полинома вычисления по методу гармонического баланса, Галеркина и коллокаций становятся слишком громоздкими. Существенным недостатком этих методов является необходимость предварительного произвольного выбора числа членов полинома и связанная с этой необходимостью возможность возникновения недопустимо большой ошибки или, наоборот, излишних сложных вычислений. Следует учесть, что при получении недопустимо больших ошибок весь расчет необходимо повторить для большего числа гармоник.

С целью избежать выполнения излишних вычислений, а также формализовать и упростить расчет сложной электрической цепи со сталью, в настоящей статье предлагается метод расчета по квазилинейным комплексным уравнениям баланса напряжений отдельных гармоник. Метод использует принцип гармонического баланса для предварительно определенных э. д. с. и падений напряжения гармоник. При этом обеспечивается возможность учета взаимного влияния друг на друга стольких гармоник, сколько будет необходимо для достижения требуемой точности.

Изложим метод квазилинейных уравнений гармонических составляющих на примере простой цепи из нелинейной индуктивности и постоянного активного сопротивления. Впоследствии мы распространим метод и на более сложные цепи. Пусть уравнение цепи имеет вид:

$$\frac{d\psi}{dt} + R \cdot i(t) = E_0 + E_m \sin \omega t. \tag{1}$$

Так как генератором высших гармоник в данном случае является нелинейная индуктивность, то выражения для э. д. с. высших гармоник следует искать в $\frac{d\psi}{dt}$. Нелинейная индуктивность в соответствии с периодическим током в цепи $i(t)$ есть также некоторая функция времени $L[i(t)]$. Поэтому выражение (1) можно записать в виде:

$$L[i(t)]\frac{di(t)}{dt}+i(t)\frac{dL[i(t)]}{dt}+Ri(t)=E_0+E_m\sin\omega t. \qquad (2)$$

В (2) падение напряжения на линейной индуктивности представлено двучленом:

$$\frac{d\psi}{dt}=L\,[i(t)]\,\frac{di(t)}{dt}+i(t)\,\frac{dL[i(t)]}{dt}=U_L-e_n, \qquad (3)$$

первое слагаемое которого зависит от скорости изменения тока и формально может быть сопоставлено с падением на нелинейной индуктивности $L_{\text{экв}}(i)\frac{di(t)}{dt}$. Это слагаемое можно принять за падение напряжения на некоторой расчетной нелинейной индуктивности с $L_{\text{экв}}(i)=L\,[i\,(t)\,]$. Второе слагаемое зависит от скорости изменения параметра L и с обратным знаком может рассматриваться как некоторая параметрическая э. д. с., представляющая собой сумму э. д. с. высших гармоник и поправок к э. д. с. гармоник.

Подобное разделение $\frac{d\psi}{dt}$ на падение напряжений и э. д. с. преобразования не произвольное. Э. д. с. необходимо рассматривать как причину, а падение напряжения — как следствие токов. В данном случае это условие удовлетворяется, и при равенстве нулю э. д. с. преобразования $e_n=-i(t)\,\frac{dL[i(t)]}{dt}=0$ отсутствуют также и токи высших гармоник, так как при этом условии $L[i(t)]=\text{const}$.

Поправкой к э. д. с. гармоник мы называем некоторую расчетную часть э. д. с. данной гармоники, идущую на образование токов высших гармоник.

Для определения выражений для э. д. с. и падений напряжений выразим аналитически зависимость $\psi(i)$. Согласно теореме Вейерштрасса [2], $\psi(i)$ можно аппроксимировать степенным полиномом некоторого порядка. Так как $\psi(i)$ нечетная функция, то получим, что

$$\psi(i)=\sum_{p=0}^{n}a_p i^{2p+1}. \qquad (4)$$

При этом индуктивность как функция тока будет равна

$$L(i)=\frac{\psi(i)}{i}=\sum_{p=0}^{n}a_p i^{2p}. \qquad (5)$$

Обычно для большинства случаев расчета цепей со сталью можно ограничиться n равным 2 или 3.

Разлагая ток $i(t)$ на гармонические составляющие и учитывая, что произведения гармоник дают новые гармоники с частотами, равными алгебраической сумме частот гармоник, входящих в произведение, выделим k-ую гармонику из получаемого множества гармоник изменения индуктивности. Будем иметь:

$$I_{m,k}\sin(k\omega t+\varphi_k)=a_1\sum_{x_1\in N_2}\sum_{x_2\in N_2}\frac{1}{2}I_{m,x_1}I_{m,x_2}\cos(k\omega t+\varphi'_{x_1}+\varphi'_{x_2})+$$

$$+a_2\sum_{x_1\in N_4}\sum_{x_2\in N_4}\sum_{x_3\in N_4}\sum_{x_4\in N_4}\left(\frac{1}{2}\right)^3 I_{m,x_1}I_{m,x_2}I_{m,x_3}I_{m,x_4}\cos(k\omega t+\varphi'_{x_1}+\varphi'_{x_2}+\varphi'_{x_3}+$$

$$+\varphi'_{x_4})+\ldots+a_n\sum_{x_1\in N_{2n}}\sum_{x_2\in N_{2n}}\cdots\sum_{x_{2n}\in N_{2n}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}I_{m,x_1}I_{m,x_2}\ldots I_{m,x_{2n}}\times$$

$$\times\cos(k\omega t+\varphi'_{x_1}+\varphi'_{x_2}+\ldots+\varphi'_{x_{2n}}). \qquad (6)$$

Для удобства записи оперируем косинусоидальными токами, поэтому фазы будут

$$\varphi'_i=\frac{\pi}{2}-\varphi_i, \qquad (7)$$

где φ_i фаза синусоидального тока. Здесь N_{2p} есть множество $\{(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{2p})/x_i=\pm 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm k, \sum_{i=1}^{2p} x_i=k\}$. Рассматривая постоянную составляющую как нулевую гармонику, все операции расчета распространяем и на нее. Отсюда и ± 0. Величина индекса тока x_i есть номер гармоники, знак индекса—знак суммирования угла гармоники. Поэтому должно иметь место равенство

$$\varphi'_{-x_i}=-\varphi'_{x_i}. \qquad (8)$$

Учитывая причинно-последовательную связь в образовании высших гармоник, т. е. последовательность «э. д. с.—ток—падение напряжения», нетрудно заметить, что постоянная э. д. с. и э. д. с. основной гармоники заданы источником и являются причиной возникновения тока нулевой и первой гармоник, и что каждая последующая гармоника э. д. с. и тока может быть образована только гармониками тока и изменением индуктивности более низкого порядка. По той же причине k-ая гармоника индуктивности не может быть образована токами более высоких гармоник. Отсюда и ограничение $|x_i|\leqslant k$.

Исходя из принципа причинно-последовательной связи, выражения собственно э. д. с. гармоники получим в виде

$$e_k=-\frac{1}{2}\sum_{q=1}^{k-1}I_{m,q}(k-q)\omega L_{m,k-q}\sin(k\omega t+\varphi_q+\psi_{k-q}), \qquad (9)$$

а поправку к э. д. с. k-ой гармоники, являющейся функцией всех гармоник тока,—в виде

$$\Delta e_k = \frac{1}{2}\sum_{q=1}^{\infty} [I_{m,q}(k+q)\omega L_{m,k+q}\sin(k\omega t - \varphi_q + \psi_{k+q}) -$$

$$- I_{m,k+q}\, q\omega L_{m,q}\sin(k\omega t - \psi_q + \varphi_{k+q})]. \tag{10}$$

Разложив $i(t)$ на гармонические и выразив $L[i(t)]$ в виде функции от гармоник тока, из выражения $U_L = \sum_{k=1}^{\infty} U_{m,L,k}\sin(k\omega t + \beta_k) = L[i(t)]\frac{di(t)}{dt}$ получим k-ую гармонику падения напряжения на индуктивности $L[i(t)]$ в виде

$$U_{m,L,k}\sin(k\omega t + \beta_k) = a_1 k\omega I_{m,k}\cos(k\omega t + \varphi_k) +$$

$$+ a_3 \sum_{x_1\in N_3}\sum_{x_2\in N_3}\sum_{x_3\in N_3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 |x_3|\omega I_{m,x_1}I_{m,x_2}I_{m,x_3}\cos(k\omega t + \varphi_{x_1} + \varphi_{x_2} + \varphi_{x_3}) + \dots +$$

$$+ a_p \sum_{x_1\in N_{2p+1}}\sum_{x_2\in N_{2p+1}}\dots\sum_{x_{2p+1}\in N_{2p+1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{2p} |x_{2p+1}|\omega I_{m,x_1}I_{m,x_2}\dots I_{m,x_{2p+1}} \times$$

$$\times \cos(k\omega t + \varphi_{x_1} + \varphi_{x_2} \dots + \varphi_{x_{2p+1}}) + \dots \tag{11}$$

Здесь N_{2p+1} есть множество $\{(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_{2p+1}) / x_i = \pm 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \sum_{i=1}^{2p+1} x_i = k\}$. В отличие от множества N_{2p}, определяющего гармоники тока для нахождения гармоник изменения индуктивности, множество N_{2p+1} не ограничивается значениями $|x_i| \leqslant k$, так как падение напряжения рассматривается как следствие всех гармоник тока на индуктивности $L[i(t)]$. Заметим, что падение напряжения k-ой гармоники [1, 3] может быть представлено также и в виде

$$U_{L,k} = X_k I_k = k\omega L_k I_k, \tag{12}$$

откуда при необходимости можно определить значения приведенной линеаризированной индуктивности по k-ой гармонике.

Расчет гармоник тока в цепи выполняется итерациями с разделением на два этапа: на приближенную итерацию—без учета влияния гармоник выше k-ой, следовательно, и без учета Δe_k; на точную итерацию—с учетом влияния гармоник выше k-ой, следовательно, с учетом и Δe_k.

Уравнение баланса напряжения k-ой гармоники в рассматриваемой цепи

$$\dot{U}_{L,k} + R\dot{I}_k = \dot{E}_k + \Delta\dot{E}_k, \tag{13}$$

где в первом приближении пренебрегаются $\Delta\dot{E}_k$ и гармоники тока выше k-ой при определении $\dot{E}_k$ и $\dot{U}_{L,k}$. Уравнения сложной электрической цепи со сталью для k-ой гармоники в матричной форме имеют вид:

$$[Z_{pq,k}][\dot{I}_{q,k}] = [\dot{E}_{p,k} + \Delta\dot{E}_{p,k}]. \tag{14}$$

Необходимо однако иметь в виду, что взаимные, или смежные, нелинейные индуктивности являются функциями общего тока через эту индуктивность. При этом для удобства расчета магнитносвязанные цепи следует магнитно «развязывать».

Потери в стали P_c обычно выражаются как некоторая функция от амплитуды магнитной индукции и ее частоты. Для k-ой гармонике потери будут функциями от $B_{m,k}$ и kf. Где индукция по k-ой гармоники

$$B_{m,k} = \frac{\dot{E}_{m,k} + \Delta \dot{E}_{m,k}}{k\omega w S} \approx \frac{\dot{E}_{m,k}}{k\omega w S}, \qquad (\omega = 2\pi f). \tag{15}$$

Здесь w — число витков обмотки индуктивности, S — сечение магнитопровода. Схема замещения составляется с учетом сопротивления потерь в стали. Величина сопротивления потерь в стали по k-ой гармонике определяется как

$$R_{c,k} = \frac{E_k^2}{P_{c,k}(B_{m,k},\, kf)}. \tag{16}$$

Точность каждой рассчитываемой гармоники будет зависеть от точности аналитического выражения нелинейной характеристики $L(i)$ и числа учитываемых гармоник n_1, которое необходимо брать несколько больше числа рассчитываемых гармоник n_2. При достижении необходимой точности общего решения, когда величиной последующих гармоник можно пренебречь, вычисления прекращаются. При этом необходимо различать точность общего решения и точность расчета отдельных гармоник от точности итераций, т. е. степени совпадения $\dot{I}_k^{(i)}$ и $\dot{I}_k^{(i+1)}$.

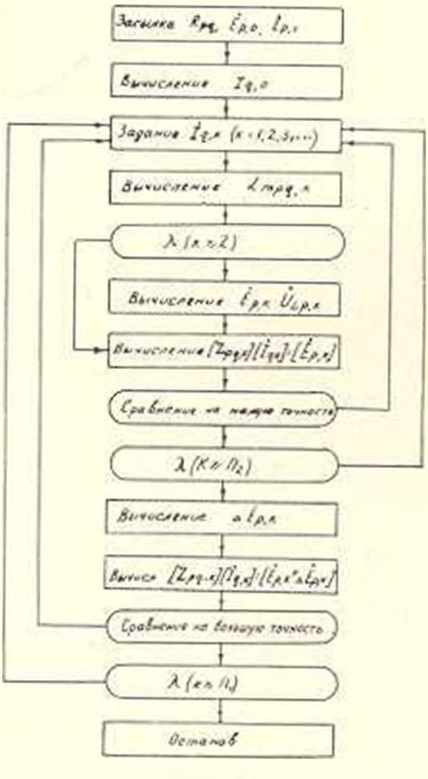

Рис. 1

Рассмотренный алгоритм расчета гармонических составляющих тока легко программируется в систему команд для выполнения их на цифровой вычислительной машине. Блок схема программы расчета цепи со сталью приведена на рис. 1. Получаемая система квазилинейных уравнений контурных токов, идентичная для всех гормоник данной цепи, наглядна и позволяет избежать операций по составлению и упорядочению нелинейных дифференциальных уравнений баланса напряжений и токов. Запись уравнений сложной электрической цепи со сталью в виде квазилинейных комплексных уравнений гармонических составляющих позволяет формальное применение методов линейной электротехники, а также использование в качестве основных подпрограмм расчета цепи со сталью на ЦВМ программ расчета линейных цепей [4].

Очевидно, существует связь между точностью расчета и объемом вычислений, однако анализ этой связи и вопросы возможной оптимизации вычислений выходят за рамки рассматриваемой здесь задачи.

Метод был опробирован аналитически на простой цепи из нелинейной условной индуктивности с зависимостью $\psi(i)=ai^3$. Результаты решения были сравнены с результатами, полученными по методу гармонического баланса и известного графического метода [3, 5]. Имеется определенное сходство в результатах предлагаемого метода и гармонического баланса. Некоторое отличие заключалось в том, что при методе гармонического баланса получаемые в процессе счета гармоники порядком выше, чем порядок искомого тригонометрического полинома, пренебрегались, тогда как в предлагаемом методе эти гармоники могли быть использованы для некоторого уточнения получаемого решения. Сравнение с графическим методом показало, что сумма гармоник, полученных предлагаемым методом, дает кривую тока $i(t)$ более близкую к графически полученной, чем сумма гармоник, полученных из графической кривой $i(t)$ методом трех (или пяти) координат [5].

Выводы

1. Предлагаемый метод представляет собой развитие принципа гармонического баланса для расчета сложных электрических цепей со сталью по квазилинейным (рекуррентным) уравнениям гармонических составляющих.

2. Метод позволяет формализовать расчет сложных электрических цепей со сталью и избежать излишних вычислений, возможных при применении метода гармонического баланса.

3. Метод дает возможность получать решения с любой заданной точностью, не ограничиваясь ни степенью аппроксимирующего полинома, ни точностью и числом рассчитываемых гармоник. Одновременно позволяет учитывать и потери в стали.

4. Расчет цепи со сталью при применении изложенного метода сводится к решению квазилинейных комплексных уравнений контурных токов или узловых напряжений.

Арм НИИЭ

Поступило 25. VI. 1971.

Է. Լ. ՀՈՎՀԱՆՆԻՍՅԱՆ

ՀԱՐՄՈՆԻԿ ԲԱՂԱԴՐԻՉՆԵՐԻ ՁԵՎՈՎ ԿՈՂՄ ԳԾԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԵԹՈԴԸ ՊՈՂՊԱՏ ՊԱՐՈՒՆԱԿՈՂ ՇՂԹԱՆԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Առաջարկվում է հաշվարկի մեթոդ, որն իրենից ներկայացնում է հարմոնիկ բալանսի սկզբունքի զարգացում ոչ-գծային ինդուկտիվություններ պարունակող բարդ էլեկտրական շղթաների հաշվարկ կատարելու համար՝ ըստ առանձին հարմոնիկաների լարման բալանսի ձևով գծային կոմպլեքսային հավասարումներով։ Մեթոդը թույլ է տալիս ֆորմալիզացնել և պարզեցնել հավասարումների կազմելը և լուծելը և հարմոնիկ բաղադրիչների լուծման համար օգտագործել գծային էլեկտրատեխնիկայի մեթոդները, օրինակ՝ կոնտուրային հոսանքների մեթոդը։ Ոչ-գծային մագնիսական բնութագրերը մոտարկվում են ցանկացած կարգի աստիճան ունեցող բազմանդամով։ Մեթոդը հաշվի է առնում հոսանքի հարմոնիկաների փոխազդեցությունը մեկը մյուսի վրա։ Հնարավոր է թվային հաշվիչ մեքենաների անմիջական օգտագործումը հաշվարկի համար։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бессонов Л. А.* Нелинейные электрические цепи, «Высшая школа», 1964.
2. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимаций, Изд. «Наука», 1965.
3. *Бессонов Л. А.* Теоретические основы электротехники, «Высшая школа», 1967.
4. *Адонц Г. Т.* Многополюсник, Изд. АН Арм. ССР, 1965.
5. *Атабеков Г. И., Тимофеев А. Б., Хухриков С. С.* Теоретические основы электротехники, ч. 2, «Энергия», 1970.