

МАШИНОСТРОЕНИЕ

К. Х. ШАХБАЗЯН, С. Б. ГАРАНЯН

СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПЯТИЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА ПО  
 ИЗВЕСТНЫМ ДИСКРЕТНЫМ ПОЛОЖЕНИЯМ ШАТУННОЙ ТОЧКИ

Необходимость решения многих важных задач проектирования исполнительных механизмов для систем ориентации, космической техники, машин-автоматов и т. д. обусловила быстрое развитие теории синтеза пространственных механизмов.

Авторами работ [1] - [6] созданы основные положения пространственной кинематической геометрии и решено несколько иллюстративных задач. В работе [7] приведен синтез (методом квадратического приближения) пространственного механизма для воспроизведения заданной пространственной кривой.

В настоящей статье предлагается способ интерполиционного синтеза пространственного пятизвенового механизма с четырьмя сферическими, одной сферической и одним вращательной парами по заданным дискретным положениям точки шатуна. В основе синтеза лежит обобщенное на пространственный случай основное расчетное уравнение работы [8]

**Постановка задачи.** Пусть в системе хуз дано  $n$  точек  $M_i (M_{ix}, M_{iy}, M_{iz})$   $i=1, 2, \dots, n$ . Требуется спроектировать пространственный пятизвеновый механизм (рис. 1), имеющий на шатуне точку, траектория которой проходит через заданные точки  $M_i$ .

В общем случае поставленную задачу можно решить для  $n=7$  (см., например, [3]). Ниже мы ограничимся решением задачи для  $n=5$ . При этом задаемся плоскостью и центром вращения шарнирной точки  $H$  кривошипа  $OH$ .

$$H_x^2 + H_y^2 = b^2 \quad (1)$$

Обозначим длину отрезка  $M_i H_i$  через  $d$ . Параметры  $b$  и  $d$  необходимо выбрать так, чтобы на окружности (1) можно было отыскивать точки  $H_i (H_{ix}, H_{iy})$ , соответствующие расстояния которых до заданных точек  $M_i$  были бы постоянной величиной, равной  $d$ , т. е.

$$H_i M_i = d = \text{const.} \quad (2)$$

Значения параметров  $b$  и  $d$  в зависимости от координат заданных точек  $M_i$  можно выбрать по условиям:

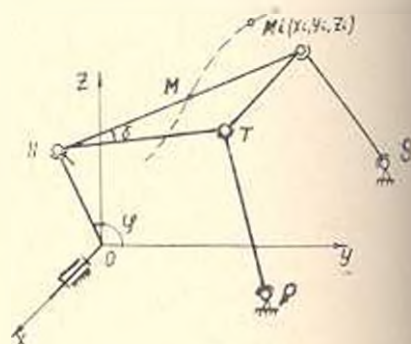


Рис. 1.

$$d \geq |M_{ix}|_{\max}; \quad 2(d + b) \geq a, \quad (3)$$

где  $a$  — наибольшая из величин  $|M_{iy}|_{\max}$  и  $|M_{iz}|_{\max}$ .

Условия (3) являются необходимыми, но недостаточными для существования условия (2) и служат лишь для непосредственного выбора значений  $b$  и  $d$ . Далее эти значения проверяются по условию

$$(M_{ix}^2 + M_{iy}^2 + M_{iz}^2 - d^2 + b^2)^2 - 4b^2(M_{ix}^2 + M_{iy}^2) \leq 0, \quad (4)$$

которое является необходимым и достаточным для выполнения условия (2). После выбора  $b$  и  $d$  из системы

$$\begin{cases} M_{ix}^2 + (M_{iy} - H_{iy})^2 + (M_{iz} - H_{iz})^2 = d^2 \\ H_{iy}^2 + H_{iz}^2 = b^2 \end{cases} \quad (5)$$

определяем координаты точек  $H_i$

$$H_{iy} = \frac{\sigma_i + \sqrt{\sigma_i^2 - m_i^2 \varphi_{ix}^2}}{2\varphi_{ix}}, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{ix}^2 &= M_{iy}^2 + M_{iz}^2; \\ \sigma_i &= M_{iy}(\varphi_{ix}^2 + M_{ix}^2 - b^2 - d^2); \\ m_i &= (\varphi_{ix}^2 + M_{ix}^2 + b^2 - d^2)^2 - 4b^2 M_{ix}^2. \end{aligned}$$

Имея  $H_{iy}$ , по формуле

$$\cos \varphi_i = \frac{H_{iy}}{b} \quad (7)$$

определим углы наклона кривошипа. Из уравнения (1) определим величину  $H_{iz}$ . Направляющие косинусы прямых  $H_i M_i$  определим по формулам:

$$\cos \alpha_i = \frac{M_{ix}}{d}; \quad \cos \beta_i = \frac{M_{iy} - H_{iy}}{d}; \quad \cos \gamma_i = \frac{M_{iz} - H_{iz}}{d}. \quad (8)$$

Принимая, что плоскость прорези кинематической пары  $H$  и ось пальца соответственно перпендикулярны кривошипу  $OH$  и прямой  $HM$ , определим направляющие косинусы оси пальца:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_i &= \frac{\omega_i}{R_i}; \\ \cos \beta_i &= \frac{1}{R_i} \sin \varphi_i \cos \alpha_i; \\ \cos \gamma_i &= -\frac{1}{R_i} \cos \varphi_i \cos \alpha_i, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$\omega_i = \cos \varphi_i \cos \alpha_{ii} - \sin \varphi_i \cos \beta_i;$$

$$R_i = \sqrt{\omega_i^2 + \cos^2 \alpha_{ii}}.$$

Шарнирные точки  $N$  и  $T$  шатуна определим соответственно на прямой  $HM$  и на прямой, лежащей на шатунной плоскости (плоскость, образованная прямой  $HM$  и осью пальца) и образующей с прямой  $HM$  некоторый постоянный угол  $\delta = \text{const}$ . Направляющие косинусы этой прямой определятся из системы:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_i' \cos \alpha_i'' - \cos \beta_i' \cos \beta_i'' + \cos \gamma_i' \cos \gamma_i'' &= \sin \delta, \\ \cos \alpha_i' \cos \alpha_i + \cos \beta_i' \cos \beta_i + \cos \gamma_i' \cos \gamma_i &= \cos \delta, \\ (\cos \alpha_i')^2 + (\cos \beta_i')^2 + (\cos \gamma_i')^2 &= 1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Ниже мы определим только координаты точки  $N_i$ , т. к. определение координат точки  $T$  можно произвести совершенно аналогично.

$S(x, y, z)$  есть точка пересечения плоскостей симметрии отрезков между точками  $N_i$ . Уравнения этих плоскостей (их число на единицу меньше числа заданных прямых) можно представить в виде:

$$(N_{jx} - N_{ix})(2x - N_{jx} - N_{ix}) + (N_{jy} - N_{iy})(2y - N_{jy} - N_{iy}) + (N_{jz} - N_{iz})(2z - N_{jz} - N_{iz}) = 0, \quad (11)$$

$$(j=2, 3, 4, 5)$$

Координаты искомой точки  $N_i$  через неизвестную длину  $l(l = H_i N_i)$  и координаты точки  $H_i$  выражаются соотношениями:

$$\begin{aligned} N_{ix} &= l \cos \alpha_i; \\ N_{iy} &= H_{iy} + l \cos \beta_i; \\ N_{iz} &= H_{iz} + l \cos \gamma_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что длина  $l$  может принимать также отрицательные значения, означающие, что искомые точки лежат на той стороне от точки  $H_i$ , которая соответствует отрицательному направлению прямой. Это объясняется тем, что если  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  — углы наклона прямой  $H_i M_i$  то  $180^\circ + \alpha_i, 180^\circ + \beta_i, 180^\circ + \gamma_i$  — также углы наклона этой прямой.

С учетом (12) уравнения (11) после преобразований можно представить в виде:

$$l B_j x + (C_j + l D_j) y + (Q_j + l F_j) z + l E_j = 0, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} C_j &= H_{jy} - H_{iy}; \\ D_j &= H_{jz} - H_{iz}; \\ B_j &= \cos \alpha_j - \cos \alpha_i; \\ D_j &= \cos \beta_j - \cos \beta_i; \\ F_j &= \cos \gamma_j - \cos \gamma_i; \end{aligned}$$

$$E_j = H_{1j} \cos \beta_{1j} + H_{2j} \cos \beta_{2j} - (H_{3j} \cos \beta_{3j} + H_{4j} \cos \beta_{4j}),$$

$$(j=2, 3, 4, 5)$$

Для определения координат центра  $S(x, y, z)$  сферической поверхности, на которой лежат точки  $N_i$ , уравнения (13) должны рассматриваться как одна система. Эта система имеет определенное решение, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} B_2 & C_2 + ID_2 & Q_2 + IF_2 & E_2 \\ B_3 & C_3 + ID_3 & Q_3 + IF_3 & E_3 \\ B_4 & C_4 + ID_4 & Q_4 + IF_4 & E_4 \\ B_5 & C_5 + ID_5 & Q_5 + IF_5 & E_5 \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

и  $r=3$ ,

где  $\Delta$  — определитель расширенной матрицы системы;  $r$  — ранг матрицы

$$\begin{vmatrix} B_2 & C_2 + ID_2 & Q_2 + IF_2 & E_2 \\ B_3 & C_3 + ID_3 & Q_3 + IF_3 & E_3 \\ B_4 & C_4 + ID_4 & Q_4 + IF_4 & E_4 \end{vmatrix}$$

Условие (14) приводится к уравнению

$$p_3 l^3 + q_3 l + k_3 = 0, \quad (15)$$

что всегда имеет место, если

$$q_3^2 - 4p_3 k_3 > 0,$$

где

$$p_3 = \begin{vmatrix} B_2 & D_2 & F_2 & E_2 \\ B_3 & D_3 & F_3 & E_3 \\ B_4 & D_4 & F_4 & E_4 \\ B_5 & D_5 & F_5 & E_5 \end{vmatrix}, \quad k_3 = \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & Q_2 & E_2 \\ B_3 & C_3 & Q_3 & E_3 \\ B_4 & C_4 & Q_4 & E_4 \\ B_5 & C_5 & Q_5 & E_5 \end{vmatrix},$$

$$q_3 = \begin{vmatrix} B_2 & D_2 & Q_2 & E_2 \\ B_3 & D_3 & Q_3 & E_3 \\ B_4 & D_4 & Q_4 & E_4 \\ B_5 & D_5 & Q_5 & E_5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} B_2 & C_2 & F_2 & E_2 \\ B_3 & C_3 & F_3 & E_3 \\ B_4 & C_4 & F_4 & E_4 \\ B_5 & C_5 & F_5 & E_5 \end{vmatrix}.$$

Подставляя корни уравнения (15) в любые три уравнения системы (13) и в уравнения (12) соответственно определим координаты  $x, y, z$  и  $N_{ix}, N_{iy}, N_{iz}$  точек  $S$  и  $N_i$ . Длина ведомого звена  $NS$  определится по формуле

$$NS = \sqrt{(x - N_x)^2 + (y - N_y)^2 + (z - N_z)^2}.$$

**Пример.** В системе координат  $xyz$  дано пять точек  $M_1(0; 0,2; 0,4)$ ;  $M_2(0,5; 0,5; 1)$ ;  $M_3(0,3; 0,6; 0,6)$ ;  $M_4(0,4; 1; 0,8)$ ;  $M_5(-0,6; 1,1; 1,3)$ .  
3. ТН, № 3

Требуется определить размеры и расположение пятизвенного направляющего механизма (рис. 1), шатунная точка которой проходит через данные точки.

По условиям (2) и (3) выбрано  $b = d = 1$ . Для длин звеньев  $HN$  и  $HT$  и координат точек  $S$ ,  $P$  и  $N$ ,  $T$  (в первом положении) соответственно получены:  $L_1 = -1.024939$ ;  $L_2 = 1.578302$ ;  $x_1 = 0.255864$ ;  $y_1 = 1.005876$ ;  $z_1 = 0.773898$ ;  $x_2 = -0.148982$ ;  $y_2 = 1.168704$ ;  $z_2 = 1.116294$ ;  $N_{1x} = 0$ ;  $N_{1y} = -1.767795$ ;  $N_{1z} = 0.877663$ ;  $T_{1x} = 0.283131$ ;  $T_{1y} = -1.046921$ ;  $T_{1z} = -0.702678$ . Длины ведомых звеньев  $NS$  и  $TP$  соответственно равны:  $NS = 0.810398$ ;  $TP = 0.919720$ .

Ерл'У. Ерл'И

Поступило 29. IX. 1971.

Կ. Խ. ՇԱԽԲԱԶՅԱՆ, Ս. Բ. ԳԱՐԱՆՅԱՆ

# ՏՈՐԱՌԱՄԱՆ ՀԵՓՈՂԱԿ ԴԵՖԷՆԵՑԻՐ ԻՆՏԵՆՏԸ ԸՈՏ ՇՈՐԱԿՈՒԹՅԱՆ ԿԵՏԻ ՇՆՏՏՆԵ ԳԻՍԿՐԵՏ ԳԻՔԵՐԻ

Ա. Վ. Փ. Ո. Փ. Ո. Փ.

Հոգիածով շարադրված է ատրածական հնգոցակ մեխանիզմի սինթեզի ընդհանուր շարժաբևեռներ կետի նախապես հայտնի դիսկրետ դիրքերի հոյց է տրված, որ խնդիրը ընդհանուր դեպքում լուծելի է չափ դիրքի համար Հին դիրքի համար ստացված է համապատասխան, որը սինթեզման շարադրված եղանակի դեպքում հանդիս է դալիս որպես իմանական հաշվարկային հաշվարկում:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Уилсон. Аналитический кинематический синтез механизмов посредством конечных перемещений. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 2, 1965.
2. Росс Б. Кинематика движения через конечно удаленные положения. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия Е, № 1, 1967.
3. Росс Б. Теория конечных перемещений и применение к синтезу механизмов. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия Е, № 4, 1967.
4. Су. Проектирование пространственных механизмов для управления перемещением твердого тела. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 3, 1968.
5. Чен П., Росс Б. Расчетные уравнения для синтеза кинематических цепей по отдельным и бесконечно близким положениям. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 1, 1969.
6. Чен П., Росс Б. Общая теория кинематического синтеза по отдельным и бесконечно близким положениям. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 1, 1969.
7. Тулл, Льюис. Пространственный кинематический синтез. Тр. американского общества инженеров-механиков, серия В, № 3, 1968.
8. Гараниян С., Шахбазян К. Применение преобразования Роберта-Чебышева при синтезе шарнирного четырехзвенника. «Известия АН Арм. ССР. Механика», № 2, 1971.