

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

Я. С. БРОВМАН, К. С. ДЕМИРЧЯН, С. Д. ШМУТЕР

МОДЕЛЬ ВИБРАЦИИ АСИНХРОННОГО ЭЛЕКТРОДВИГАТЕЛЯ

Очевидна важность разработки мер по снижению вибраций электрических машин, вызванных производственными дефектами, особенно в свете внедрения ГОСТ 16921—71 (Машины электрические. Нормы вибрации). Для устранения значимых составляющих вибрации необходимо выявление их источников, т. е. вибродиагностика. Поскольку спектр является не только исчерпывающей характеристикой вибрации, но и причин, ее порождающих, для вибродиагностики важно установление связи характеристик дефектов с соответствующими им спектральными составляющими.

Вибрация корпуса асинхронной электрической машины на подшипниках качения возбуждается анизотропией воздействия на ротор и статор вращающихся силовых элементов систем полюсов и шаров. Поскольку магнитные полюсы и шары в сепараторах вращаются асинхронно относительно ротора, здесь возможен единообразный подход на основе рассмотрения взаимодействия асинхронного силового элемента — а. с. э. (полюсы, шары) — с дефектами ротора (некруглости бочки ротора, желобов внутренних колец подшипников) и статора (некруглости расточки статора, наружных колец).

Силовой элемент, имеющий Z_c полюсов (шаров), характеристику силового поля $F_c(\varphi)$ протяженностью l_c и вращающийся со скоростью ω_c относительно неподвижной системы координат xu (рис. 1), взаимодействует с вращающимся (внутренним) дефектом, имеющим характеристику $F_n(\varphi)$ протяженностью l_n в связанной с ним вращающейся со скоростью ω_n системе координат, и/или с неподвижным (наружным) дефектом, имеющим в системе xu характеристику $F_n(\varphi)$ протяженностью l_n и начальный угол $\varphi_{во}$.

Необходимо установить зависимости спектров вертикального (y) и горизонтального (x) вибродатчиков от характеристик дефектов и а. с. э. Причем вначале простейший характер взаимодействий — дефекты и полюсы сосредоточены, т. е. $l_n, l_c \ll \frac{2\pi}{Z_c}$ и могут рассматриваться как δ -функции. Тогда взаимодействие а. с. э. с дефектами характеризуется произведениями площадей $F_c \times F_n$ и/или $F_c \times F_n$, причем, для выявления соотношения амплитуд-спектральных составляющих важен лишь относительный масштаб этих величин.

Взаимодействие а. с. э. с неподвижным дефектом в этом случае приводит к последовательности импульсов (решетчатой функции [1]) с частотой повторения $Z_c \omega_c$ (рис. 2,а). Вибрации по осям координат x, y получаются умножением этой последовательности на $\cos \varphi_{\text{н}0}$ и $-\sin \varphi_{\text{н}0}$, соответственно, т. е. отличаются только по амплитуде. Спектр такой последовательности [2] является гармоническим с амплитудами, равными для всех составляющих (частотой $kZ_c \omega_c$, где $k = 1, 2, 3, \dots$) и равными амплитуде исходных импульсов.

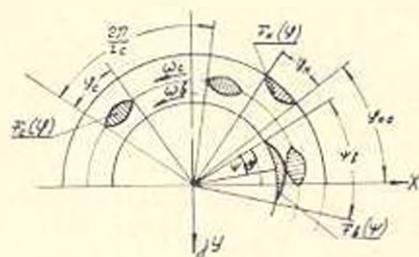


Рис. 1.

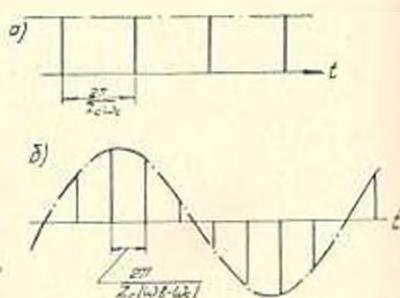


Рис. 2.

Взаимодействие а. с. э. с вращающимся дефектом приводит в вращающейся системе координат к последовательности импульсов по рис. 2,а, но с частотой повторения $Z_c |\omega_n - \omega_c|$, а в неподвижной системе координат вибрации по осям x и y получаются умножением этой последовательности на $\cos \omega_n t$ и $-\sin \omega_n t$, соответственно (рис. 2,б). Спектр такой амплитудно-модулированной последовательности импульсов [2] также характеризуется равными амплитудами всех составляющих, но уже на частоте вращения ω_n и на боковых частотах $kZ_c |\omega_n - \omega_c| \pm \omega_n$, причем, амплитуды составляющих равны половине амплитуды импульсов исходной последовательности. При этом вибрации по осям x и y для всех составляющих спектра сдвинуты между собой на угол $-\pi/2$.

Таким образом, воздействие вращающегося дефекта сводится к набору вращающихся векторов вибрации, а неподвижного дефекта — к набору пульсирующих в направлении $\varphi_{\text{н}0}$ векторов. Этот вывод, впрочем, очевиден, так как вращающийся дефект не имеет какого-либо преимущественного направления воздействия в неподвижной системе координат: при возникновении же такой анизотропии, связанной с появлением неподвижного дефекта, круговое поле вибрации деформируется в эллиптическое и в пределе (только сосредоточенный неподвижный дефект) вырождается в пульсирующее.

В приведенных рассуждениях динамическая система принималась безынерционной. Если, в первом приближении, полагать динамическую систему линейной и изотропной в пространстве, то спектры по осям x и y должны умножаться на передаточную функцию $W(j\omega)$ системы. Проиллюстрируем это на простейшем примере взаимодействия одного

сосредоточенного полюса (с единичной площадью) с распределенным вращающимся дефектом. Очевидно (рис. 1), элементарное движение вдоль оси x системы с весовой функцией $h(t)$ при воздействии полюса на угле ψ можно записать как

$$dx = F_n(\psi) \cdot d\psi \cdot \cos(\varphi - \psi) \cdot h(\tau), \quad (1)$$

где τ — время, отсчитываемое от момента этого элементарного воздействия.

Принимая при $t=0$ $\varphi - \psi = 0$ и подставляя в (1)

$$\varphi = \omega_n t, \quad \psi = |\omega_n - \omega_c| t,$$

движение $x(t)$ выразим интегралом свертки

$$x(t) = |\omega_n - \omega_c| \int_0^t F_n(|\omega_n - \omega_c|(t - \tau)) \cdot \cos \omega_c(t - \tau) \cdot h(\tau) d\tau. \quad (2)$$

При замене F_n на F_c и $\omega_n = 0$ выражение (2) характеризует движение при взаимодействии с неподвижным дефектом.

Интеграл свертки в области Фурье-изображений (спектр) может быть представлен произведением спектров [2], т. е. спектр вибрации по оси x равен спектру спроектированной на эту ось силы, умноженному на передаточную функцию $W(j\omega)$. Учитывая линейность Фурье-преобразования и линейность системы, этот вывод не изменится при рассмотрении воздействия всех полюсов.

Однако при учете протяженности дефектов и полюсов ($\varphi_n, \varphi_n, \varphi_c$) спектры спроектированного на оси x, y взаимодействия $F_n \times F_c$ (или $F_n \times F_c$) суммированием (интегрированием) только по временной области получить не удастся, приходится рассматривать бесконечные суммы спектров последовательностей импульсов, представляющих собой кусочно-непрерывные, обычно почти-периодические функции времени. Поэтому приходится вычислять спектры в два этапа: вначале интегрированием в пространстве для неизменного t находятся функции $F_x(t), F_y(t)$, а затем их Фурье-преобразованием определяются спектры.

Рассмотрим первый этап. В комплексной форме

$$\begin{aligned} \bar{F}(t) = F_x(t) + jF_y(t) &= \int_0^{2\pi} F_n(\varphi, t) \cdot F_c(\varphi, t) \cdot F_n(\varphi, t) \cdot \cos\varphi \cdot d\varphi - \\ &- j \int_0^{2\pi} F_n(\varphi, t) \cdot F_c(\varphi, t) \cdot F_n(\varphi, t) \cdot \sin\varphi \cdot d\varphi. \end{aligned} \quad (3)$$

Так как F_n и F_c определены только в пределах $0 : 2\pi$, то (3) не изменится при переходе к пределам $0 : \infty$ и, следовательно, (3) пред-

ставляет собой Лапласово (L -) преобразование произведения $F_n F_c F_a$ при параметре $s = j$:

$$\bar{F}(t) = \int_0^{\infty} F_n F_c F_a e^{-st} dz = \int_0^{\infty} F_n F_c F_a e^{-s z} dz \Big|_{s=j} = L(F_n F_c F_a)_{s=j}. \quad (4)$$

L -преобразование произведения функций равно комплексной свертке их изображений [3]. Даже для характеристик дефектов простейшего вида двойной интеграл свертки в комплексной области получить в компактной форме не удастся. Эта задача решается последовательным численным интегрированием на ЦВМ, а здесь для анализа упростим ее.

Будем рассматривать взаимодействие дефекта в виде полувольты синусоиды с системой сосредоточенных полюсов (рис. 3, а). Такое

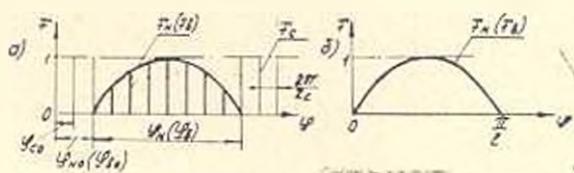


Рис. 3.

представление для шарикоподшипников и многополюсных машин достаточно хорошо согласуется с реальностью и позволяет, с другой стороны, применить эффективный аппарат дискретного (L -) преобразования Лапласа для смещенных решетчатых функций [1]. Выражая протяженность дефекта в долях $(l = 1, 2, 3 \dots) \pi$ радиан (рис. 3, б) и представляя начальные смещения как функции времени

$$z_{c0} = \omega_0 t, \quad z_{cn} = \omega_n t,$$

получаем (см. Приложение) зависимости, позволяющие анализировать влияние протяженностей дефектов и числа полюсов на комплексный спектр $\bar{F}(t)$. Здесь еще раз подчеркнем существенность последовательности операций: следует вначале осуществлять проектирование (3), (4) взаимодействий и далее рассматривать их спектральное разложение, а не производить спектральное разложение дефекта с последующим проектированием взаимодействий спектральных составляющих дефекта с а. с. э. на координатные оси, что [4] приводит к существенно иным результатам.

Для неподвижного дефекта получаем

$$\bar{F}_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-j k \omega_0 t} z_{c0} t, \quad (5)$$

где комплексные амплитуды C_k определяются по (П.18). Таким образом, вектор $\bar{F}_n(t)$ силового воздействия неподвижного дефекта

представляется в виде гармонического ряда эллипсов вибрации, большие полуоси которых равны

$$|C_{+k}| + |C_{-k}|,$$

и остальные параметры также однозначно характеризуются прямым C_{+k} и инверсным C_{-k} векторами на каждой из частот их вращения $k\omega_c Z_c$. Постоянная составляющая воздействия определяется неподвижным вектором C_0 .

Для вращающегося дефекта разложение $F_n(t)$ можно было бы получить из выражения (П.14) с учетом (П.7), однако проще и нагляднее силовое воздействие вращающегося дефекта представить как неподвижного во вращающейся со скоростью ω_n системе координат по рис. 1, т. е. вместо (5) записать

$$\bar{F}_n(t) = \sum_k C_k e^{-j(k\omega_n - \omega_c)t} Z_c t e^{-j\omega_n t}. \quad (6)$$

Таким образом, вектор $\bar{F}_n(t)$ представляется набором векторов верхних боковых частот $(kZ_c |\omega_n - \omega_c| + \omega_n)$ с амплитудами прямых векторов $|C_{+k}|$ и нижних боковых частот $(kZ_c |\omega_n - \omega_c| - \omega_n)$ с амплитудами инверсных векторов $|C_{-k}|$, а также вектором на частоте вращения ротора ω_n с амплитудой постоянной составляющей воздействия $|C_0|$.

Здесь следует отметить, что учет протяженности дефектов не вносит дополнительных частот в спектр вибраций, найденный ранее из анализа воздействия сосредоточенных дефектов, но позволяет выявить соотношения между амплитудами составляющих спектра применительно к задаче различения дефектов. Однако модель, учитывающая взаимодействие неподвижного и вращающегося протяженных дефектов, позволяет обнаружить и некоторые новые частоты в спектре, например, центральные частоты $kZ_c |\omega_n - \omega_c|$.

Принятая в анализе форма дефекта в виде полуволны синусоиды представляется наиболее общей; очевидно, что пользуясь изложенной в приложении методикой, аналогичные результаты могут быть получены и для других аппроксимаций дефекта, например, прямоугольной, треугольной, пилообразной формы.

Приложение

L — изображение одиночного дефекта $F(z)$ (рис. 3,б) имеет вид:

$$f(s) = L(F(z)) = L\left(\sin lz + \sin l\left(z - \frac{\pi}{l}\right)\right) = \frac{l}{s^2 + l^2} \left(1 + e^{-T}\right), \quad (П.1)$$

Учет смещения на угол $\varphi_{но}(\varphi_{но})$ соответствует умножению выражения (П.1) на $e^{-\varphi_{но}s}$.

При дискретном Лапласовом преобразовании дефекта

$$f^*(s) = D(F(n)) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n)e^{-sn} \quad (\text{П.2})$$

номера отсчетов ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$)

$$n = \frac{\varphi}{2\pi} Z_c = \frac{\varphi}{\bar{\omega}_c} \quad (\text{П.3})$$

где $\bar{\omega}_c = \frac{2\pi}{Z_c}$ частота (или период повторения) решетчатой функции, если номера отсчетов n считать безразмерным дискретным временем (т. е. $\varphi = \bar{\omega}_c n = \bar{\omega}_c t$).

Для того, чтобы (П.2) соответствовало $\bar{F}(t)$ по (4), необходимо по-прежнему умножать F на $e^{-t\varphi}$, т. е. в (П.2) брать $s = j\bar{\omega}_c$ [вместо $s = j$ в (4)]. „Частота“ дефекта соответственно будет:

$$\bar{\omega} = l\bar{\omega}_c = 2\pi \frac{l}{Z_c} \quad (\text{т. е. } \sin lz = \sin \bar{\omega}t). \quad (\text{П.4})$$

Смещения в безразмерной форме выразятся следующим образом:
— начальное смещение дефекта

$$s\bar{z}_0 = j\bar{z}_0 = j\bar{\omega}_c t, \quad (\text{П.5})$$

где для неподвижного дефекта

$$t_0 = \frac{\bar{z}_{00}}{\bar{\omega}_c} = \frac{\bar{z}_{00} Z_c}{2\pi}, \quad (\text{П.6})$$

а для вращающегося дефекта

$$t_0 = \frac{\bar{z}_{00}}{\bar{\omega}_c} - \frac{\omega_c t}{\bar{\omega}_c} = \frac{\omega_c Z_c}{2\pi} t; \quad (\text{П.7})$$

— смещение в с. э. (решетчатой функции)

$$s\bar{z}_{c0} = j\bar{z}_{c0} = j\bar{\omega}_c t, \quad (\text{П.8})$$

$$\text{где } \varepsilon = \frac{\omega_c t}{\bar{\omega}_c} = \frac{\omega_c Z_c}{2\pi} t < 1 \quad (\text{П.9})$$

(т. к. взаимодействие повторяется с периодом $\bar{\omega}_c$);

— смещение, обеспечивающее переход от синусоиды к одиночному импульсу (П.1)

$$\frac{\bar{z}}{l} s = \frac{\bar{z}}{l} j - j\bar{\omega}_c t, \quad (\text{П.10})$$

$$\text{где } t = \frac{Z_c}{2l}. \quad (\text{П.11})$$

Для перехода от l -изображения (П.1) к D -изображению сме-

щенной решетчатой функции $|l|$ вместо (П.2) следует записать

$$f^*(s, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n + \varepsilon) e^{-sn}. \quad (\text{П.12})$$

Однако искомое в соответствии с (1) выражение

$$\bar{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F(n + \varepsilon) e^{-j(n+\varepsilon)t} \Big|_{s=j\omega_c} = e^{-j\varepsilon t} f^*(s, \varepsilon) \Big|_{s=j\omega_c}, \quad (\text{П.13})$$

т. е. D -изображение дефекта, следует умножить на оператор сдвига $e^{-j\varepsilon t}$, поскольку $\bar{F}(t)$ определено в неподвижной, а не поворачиваемой вместе с решеткой $|l|$ системе координат.

Пользуясь правилами и таблицами $|l|$ прямого D -преобразования, из (П.13) с учетом (П.1) и (П.4)-(П.11) получаем

$$\bar{F}(t) = \bar{F}_1 + \bar{F}_2, \quad (\text{П.14})$$

где

$$\bar{F}_1 = \begin{cases} e^{-j\omega_c t} \frac{\sin \omega(1 + \varepsilon - (k - |l|)) + e^{-j\omega t} \sin \omega((k - |l|) - \varepsilon)}{e^{2j\omega_c t} - 2e^{j\omega_c t} \cos \omega + 1} \cdot e^{-j\omega_c t} \delta(t - 0) & \text{при } 0 \leq \varepsilon \leq k - |l| \\ e^{-j\omega_c t} \frac{e^{j\omega_c t} \sin \omega(\varepsilon - (k - |l|)) + \sin \omega(1 - \varepsilon + (k - |l|))}{e^{2j\omega_c t} - 2e^{j\omega_c t} \cos \omega + 1} \cdot e^{-j\omega_c t} \delta(t - 1) & \text{при } k - |l| \leq \varepsilon \leq 1 \end{cases} \quad (\text{П.15})$$

$$\bar{F}_2 = \bar{F}_1, \dots \quad (\text{П.16})$$

знаком $|l|$ обозначается целая часть числа.

$\bar{F}(t)$ изменяется периодически при изменении ε от 0 до 1, поэтому для комплексных коэффициентов C_k ряда Фурье [3] в принятой по рис. 1 системе координат можно записать:

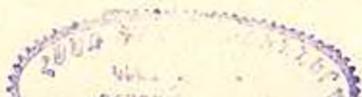
$$C_k = \int_0^1 \bar{F}(\varepsilon) e^{jk2\pi\varepsilon} d\varepsilon = \int_0^{1-|l|} \bar{F}_1(\varepsilon) e^{jk2\pi\varepsilon} d\varepsilon + \int_{1-|l|}^1 \bar{F}_1(\varepsilon) e^{jk2\pi\varepsilon} d\varepsilon + \int_0^{k-|l|} \bar{F}_2(\varepsilon) e^{jk2\pi\varepsilon} d\varepsilon + \int_{k-|l|}^1 \bar{F}_2(\varepsilon) e^{jk2\pi\varepsilon} d\varepsilon. \quad (\text{П.17})$$

После интегрирования и подстановок (П.3), (П.4), (П.6) и (П.11) для неподвижного дефекта окончательно получаем:

$$C_k = \frac{lZ_c}{\pi |l^2 - (kZ_c - 1)^2|} \cos \frac{\pi(kZ_c - 1)}{2l} e^{j\pi k Z_c - 1} \cos \frac{\pi}{2l}, \quad (\text{П.18})$$

При возникновении неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ (например, при $l=1$ и $k=0$) следует применять обычные методы их раскрытия.

Поступило 20. 11. 1972.



ՏՈՒՆՆԵՐԻՆԻ ԳՐԱԳՐԱԿԱՆ ԿԵՆՏՐՈՆԻ ԿՈՄԻՏԵ

ԱՊԱՍԻԿԵՐՈՆ ԷԼԵԿՏՐԱԶԱՐԿԻՉԻ ՎԻՐՐԱՑԻԱՅԻ ՄՈԴԵԼ

Ա Վ Փ Ո Փ Ո Ւ Մ

Իրաված է ապասխնիրոն էլեկտրաշարժիչի վիրրացիայի սպեկտրը, որն առաջանում է զնդիկափոր առանցքակալների և սուտոր-գաշտ-ստաաորս սիս-տանի թերուիլանների պատառոփ: Կիրառելով կապասի գիսկրիա վերափոխումները, բացատրաված է սպեկտրի (վիրրացիայի էլիպսի ճարմոնիկ շար-չի) կախումը թերուիլան պարամետրներից:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Цыпкии Я. А. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.
2. Харкевич А. А. Спектры и анализ. Физматгиз, 1962.
3. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа. Изд-во «Наука», 1965.
4. Писарчик Р. И., Харлимон С. А. Спектральный анализ резкий радикальноупорного шарикового подшипника, обусловленных дефектами колеи и шариков. «Изв. АН СССР. Механика твердого тела», 1971, № 1.