ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXV, № 2, 1972 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

В. М. МКРТЧЯН, Д. О. МЕЛКУМЯН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ И ОЦЕНКА ЕЕ КАЧЕСТВА

Устойчивость дискретных систем связана с расположением корней характеристического полинома относительно единичного круга [1—4]. Существуют условия, аналогичные критериям Рауса, Гурвица, Найквиста и Михайлова, позволяющие исследовать устойчивость системы, не находя корни характеристического полинома. В связи с широким применением ЭВМ в научных и инженерных расчетах возникает необходимость разработки новых методов анализа и синтеза систем, удобных с вычислительной точки зрения.

В статье предлагается новый критерий устойчивости для линейных дискретных систем, который, наряду с простотой и наглядностью, удобен при реализации на ЭВМ. Аналогичный критерий существует для непрерывных линейных систем с сосредоточенными параметрами [5].

1. Некоторые свойства производной аргумента характеристического полинома. Рассмотрим линейные дискретные системы, имеющие характеристический полином с вещественными коэффициентами:

$$D(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^{n-k}. \tag{1}$$

Согласно основной теореме алгебры многочлен (1) можно представить в виде:

$$D(z) = a_0 \prod_{k=1}^{n} (z - z_k). \tag{2}$$

Положим в (2) $z = e^{i\omega}$, тогда

$$\arg D(e^{i\omega}) = \sum_{k=1}^{n} \arg (e^{i\omega} - z_k). \tag{3}$$

Производная соотношения (3) является объектом настоящего исследования. Для простоты записи обозначим:

$$\begin{aligned} \theta_k(\omega) &= \frac{d}{d\omega}[\arg (e^{i\omega} - z_k)]; \\ \theta(\omega) &= \frac{d}{d\omega}[\arg D(e^{i\omega})], \end{aligned} \tag{4}$$

тогда из (3) следует:

$$\theta(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \theta_k(\omega). \tag{5}$$

Таким образом, производная аргумента характеристического полинома состоит из n слагаемых (компонент), которые однозначно определяются корнями характеристического полинома.

Покажем некоторые интересные свойства функции $\theta_k(\omega)$. Пусть корни полинома (1) имеют вид:

$$z_k = x_k + iy_k = R_k(\cos\varphi_k + i\sin\varphi_k). \tag{6}$$

$$k = 1, 2, \cdots, n$$

Тогда, учитывая тождество $e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega$, из (4) и (6) получим:

$$\theta_k(\omega) = \frac{d}{d\omega}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\omega - R_k\sin\varphi_k}{\cos\omega - R_k\cos\varphi_k}\right). \tag{9}$$

Отсюда, производя некоторые простые преобразования, получим:

$$\theta_k(\omega) = \frac{1 - R_k\cos(\omega - \varphi_k)}{1 + R_k^2 + 2R_k\cos(\omega - \varphi_k)}. \tag{7}$$

Ясно, что как функции $\theta_k(\omega)$, так и производная аргумента $\theta(\omega)$ являются периодическими функциями с периодом 2π, т. е.

$$\begin{aligned} &\theta_k(\omega) = \theta_k(\omega + 2\pi m), \\ &\theta(\omega) = \theta(\omega + 2\pi m), \quad (m=0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{aligned} \tag{8}$$

поэтому их поведение исследуем только в интервале $[0, 2\pi]$. Экстремальные значения функции $\theta_k(\omega)$ находим из условия

$$\frac{d\theta_k}{d\omega} = \frac{R_k(R_k^2 - 1)\sin(\omega - \varphi_k)}{[1 + R_k^2 - 2R_k\cos(\omega - \varphi_k)]^2} = 0, \tag{9}$$

отсюда:

а) $R_k^2 - 1 = 0$, б) $R_k = 0$, в) $\sin(\omega - \varphi_k) = 0$.

В случаях $R_k=0$ и $R_k=1$ равенство (9) превращается в тождество, следовательно, $\theta_k(\omega)$ постоянна, причем,

$$\theta_k(\omega) = \begin{cases} 1/2 \text{ если } R_k = 1, \\ 1 \text{ если } R_k = 0. \end{cases} \tag{10}$$

В остальных случаях экстремальные значения определяются по уравнению

$$\sin(\omega - \varphi_k) = 0,$$

отсюда

$$\omega = \varphi_k + m\pi \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{11}$$

При этом максимумы и минимумы функции $\theta_k(\omega)$ можно определить с помощью второй производной

$$\frac{d^2\theta_k}{d\omega^2}=\frac{R_k(R_k^2-1)[(1+R_k^2)\cos(\omega-\varphi_k)-2R_k-2R_k\sin^2(\omega-\varphi_k)]}{[1+R_k^2-2R_k\cos(\omega-\varphi_k)]^3}. \tag{12}$$

Очевидно, что для внутренних точек единичного круга ($R_k<1$)

$$\max\theta_k(\omega)=\frac{1}{1-R_k},\quad \text{если } \omega=\varphi_k+2m\pi;$$

$$\min\theta_k(\omega)=\frac{1}{1+R_k},\quad \text{если } \omega=\varphi_k+(2m+1)\pi. \tag{13}$$

Для внешних точек единичного круга ($R_k>1$)

$$\min\theta_k(\omega)=\frac{1}{1-R_k},\quad \text{если } \omega=\varphi_k+2m\pi;$$

$$\max\theta_k(\omega)=\frac{1}{1+R_k},\quad \text{если } \omega=\varphi_k+(2m+1)\pi. \tag{14}$$

Графики функции $\theta_k(\omega)$ для характерных случаев показаны на рис. 1 ($R_k\leqslant1$) и на рис. 2 ($R_k>1$).

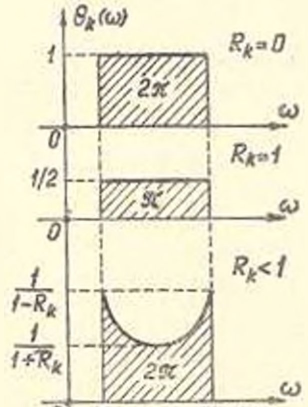

Рис. 1.

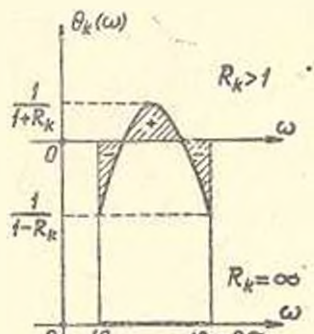

Рис. 2.

Пользуясь принципом аргумента [6] или непосредственным интегрированием (7), можно показать важное свойство функции $\theta_k(\omega)$, а именно:

$$\int_{\varphi_k}^{\varphi_k+2\pi}\theta_k(\omega)\,d\omega=\begin{cases}2\pi, & \text{если } R_k<1;\\ \pi, & \text{если } R_k=1;\\ 0, & \text{если } R_k>1.\end{cases} \tag{15}$$

Это свойство и лежит в основе предложенного критерия устойчивости. Заметим, что в силу периодичности функции $\theta_k(\omega)$, интеграл (15) можно вычислить в интервале $[-\pi, \pi]$.

Необходимо отметить, что формулу (7) можно получить при помощи законов элементарной геометрии, рассматривая два случая: корень полинома находится внутри или вне единичного круга. Такой подход не дает дополнительных результатов, поэтому здесь не приводится.

2. **Критерий устойчивости.** Докажем справедливость следующего утверждения: *чтобы линейная дискретная система, имеющая характеристический полином* (1) *была устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы площадь, расположенная между графиком* $\theta(\omega)$ *и абсциссой, была равна* $2n\pi$, *т. е.*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \theta(\omega)\, d\omega = 2n\pi. \tag{16}$$

Чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы $R_k<1$. Тогда

$$\int_{-\pi}^{\pi} \theta(\omega)\, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \Big[\sum_{k=1}^{n} \theta_k(\omega) \Big] d\omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \theta_k(\omega)\, d\omega, \tag{17}$$

и на основании свойства (15) получим критерий (16). Достаточность легко доказуема: если справедливо (16), то из соотношений (17) и (15) следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \theta_k(\omega)\, d\omega = 2\pi,$$

т. е. $R_k<1$, следовательно, система устойчива.

Предложенный критерий устойчивости (16) по существу является интегральной формой принципа аргумента.

3. **Формулы вычисления.** Формулы (5) и (7) удобны для исследования некоторых свойств функции $\theta(\omega)$, однако они совершенно непригодны для вычисления значения $\theta(\omega)$, так как требуют нахождения корней полинома (1). Существует другой путь вычисления функции $\theta(\omega)$, без которого критерий (16) лишился бы смысла.

Положим в (1) $z=e^{i\omega}$, тогда

$$D(e^{i\omega}) = u(\omega) + iv(\omega), \tag{18}$$

где

$$u(\omega) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos(n-k)\,\omega, \qquad v(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \sin(n-k)\,\omega. \tag{19}$$

Отсюда

$$\arg D(e^{i\omega}) = \mathrm{Arc\,tg}\, \frac{v(\omega)}{u(\omega)}.$$

следовательно, из определения (4)

$$\theta(\omega)=\frac{d}{d\omega}\left(\operatorname{Arc\,tg}\frac{v}{u}\right)=\frac{uv'-vu'}{u^2+v^2}. \tag{20}$$

Здесь

$$u'=-\sum_{k=0}^{n-1}a_k(n-k)\sin(n-k)\omega;$$

$$v'=\sum_{k=0}^{n-1}a_k(n-k)\cos(n-k)\omega. \tag{21}$$

В простейших случаях условие (16) можно использовать в качестве аналитического критерия. Это обстоятельство дает возможность иллюстрировать предложенный критерий (см. пример 1). Отметим, что $\theta(\omega)$ является четной функцией, т. е.

$$\theta(\omega)=\theta(-\omega). \tag{22}$$

Действительно, из (19) и (21) видно, что функции $u(\omega)$ и $v'(\omega)$—четные, а функции $v(\omega)$ и $u'(\omega)$—нечетные. Следовательно, из (20) следует, что $\theta(\omega)$ четная функция. В силу (22) условие (16) примет вид:

$$\int_0^{\pi}\theta(\omega)\,d\omega=\pi n. \tag{23}$$

Таким образом, определение устойчивости линейных дискретных систем сводится к вычислению определенного интеграла (23), при этом ошибка численного интегрирования должна быть несколько меньше π.

4. Оценка корней многочлена. Качество дискретных систем тесно связано с расположением корней многочлена (1) внутри единичного круга. При этом качество системы тем лучше, чем ближе расположены все корни к центру круга. С этой точки зрения важное значение имеет оценка модуля корня полинома (1).

Пусть наибольшее значение функции $\theta(\omega)$ равно величине M в интервале $[0, \pi]$. Покажем, что если система устойчива, то все корни характеристического полинома (1) расположены в круге, радиус которого равен $(M-1)/M$. Действительно, так как

$$M\geqslant\max\theta_k(\omega)=\frac{1}{1-R_k},$$

то

$$R_k\leqslant\frac{M-1}{M}. \tag{24}$$

Таким образом, построением графика производной аргумента не только определяется устойчивость системы, но и оценивается ее качество.

5. Примеры. Пример 1. Определить устойчивость дискретной системы, имеющей характеристический полином

$$D(z) = z^2. \qquad (25)$$

По формулам (19), (20), (21) и (23) получим:

$$u(\omega) = \cos 2\omega; \qquad u'(\omega) = -2\sin 2\omega;$$

$$v(\omega) = \sin 2\omega; \qquad v'(\omega) = 2\cos 2\omega;$$

$$\int_0^{\pi} \theta(\omega)\, d\omega = \int_0^{\pi} \frac{vu' - vu'}{u^2 + v^2}\, d\omega = \int_0^{\pi} \frac{2\cos^2 2\omega + 2\sin^2 2\omega}{\sin^2 2\omega + \cos^2 2\omega}\, d\omega = 2\pi.$$

Условие (23) удовлетворено, следовательно, система устойчива. Действительно, корни полинома (25) по модулю меньше единицы, поэтому система устойчива.

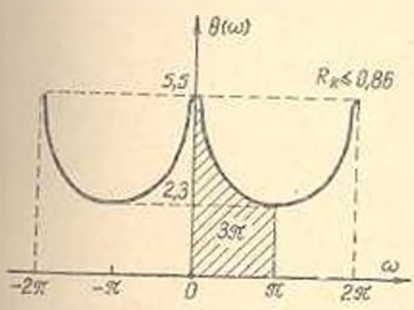

Рис. 3.

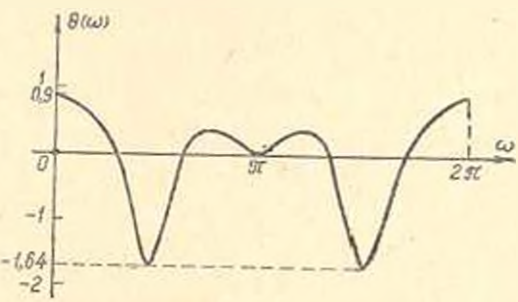

Рис. 4.

Пример 2. Характеристический полином дискретной системы имеет вид [4]:

$$D(z) = z^3 - 1{,}03\, z^2 + 0{,}24 z + 0{,}0044. \qquad (26)$$

Определить устойчивость системы и оценить корни полинома. График функции $\theta(\omega)$ (рис. 3) построен по формуле (27) в интервале $[-2\pi, 2\pi]$, при этом

$$u = \cos 3\omega - 1{,}03\cos 2\omega + 0{,}24\cos\omega + 0{,}0044;$$

$$v = \sin 3\omega - 1{,}03\sin 2\omega + 0{,}24\sin\omega;$$

$$u' = -3\sin 3\omega + 2{,}06\sin 2\omega - 0{,}24\sin\omega;$$

$$v' = 3\cos 3\omega - 2{,}06\cos 2\omega + 0{,}24\cos\omega.$$

Численным интегрированием функции $\theta(\omega)$ или подсчетом элементарных площадей на рис. 3 в интервале $[0, \pi]$ получим:

$$\int_0^{\pi} \theta(\omega)\, d\omega = 9{,}419.$$

В силу дискретности величины интеграла заключаем, что

$$\int_0^{\pi} \theta(\omega)\, d\omega = 3\pi,$$

т. е. рассматриваемая система устойчива.

Теперь произведем оценку корней многочлена. Из рис. 3 видно, что

$$M = \sup \theta(\omega) = 5{,}3, \quad [0 \leqslant \omega \leqslant 2\pi]$$

поэтому все корни многочлена (26) расположены внутри круга, радиус которого определяется по формуле (24), т. е.

$$R_k \leqslant \frac{M-1}{M} = 0{,}86.$$

Действительно, корнями многочлена (26) являются: $z_1 = 0{,}64$; $z_2 = 0{,}41$; $z_3 = -0{,}02$, модули которых меньше 0,86.

Пример 3. Система имеет характеристический полином вида

$$D(z) = z^3 + 2z^2 + z + 5. \tag{27}$$

Определить ее устойчивость.

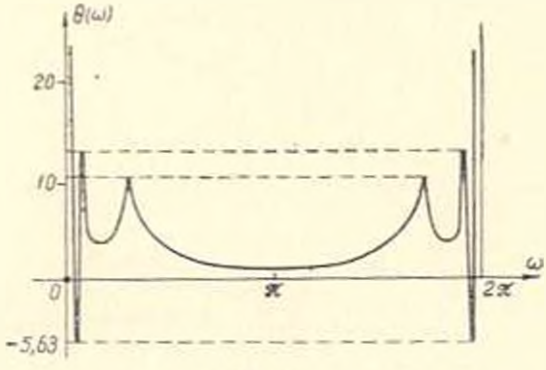

Рис.5.

График функции $\theta(\omega)$ для этого случая показан на рис. 4. Так как функция имеет отрицательное значение, то система неустойчива. Отрицательность $\theta(\omega)$ является достаточным признаком неустойчивости, однако она не является необходимым. Например, для системы

$$D(z) = z^2 - 2z - 1$$

$\theta(\omega) > 0$, но система не устойчива, так как $z_1 = -0{,}41$, $z_2 = 2{,}41 > 1$. Корни многочлена (27) следующие: $z_1 = 0{,}217 + i\,1{,}418$; $z_2 = 0{,}217 - i\,1{,}418$; $z_3 = -2{,}433$, откуда следует, что полином (27) неустойчив.

В заключение рассмотрим особый случай, когда корни многочлена находятся на единичной окружности. Практическим вычислениям присущи определенные неточности и вблизи точек, расположенных на единичной окружности, замечаются сильные колебания функции $\theta(\omega)$, которые по существу могут являться признаками того, что система находится на пределе устойчивости. Примером может служить график $\theta(\omega)$ системы

$$D(z) = (z - 0{,}8)(z - 1)(z^2 - z + 0{,}8),$$

показанный на рис. 5.

6. Сравнение критериев устойчивости. В качестве графического критерия предложенный критерий и критерий Михайлова или Найквиста эквивалентны, только по объему вычислений предложенный критерий несколько уступает, хотя его график намного нагляднее. Однако с точки зрения реализации на ЭВМ предложенный критерий имеет существенное преимущество. Если предложенный критерий реализуется на ЭВМ в виде численного интегрирования функции $\theta(\omega)$ в определенном интервале $[0, \pi]$, то критерий Михайлова реализуется на ЭВМ в виде определения действительных корней трансцендентных уравнений

$$u = \mathrm{Re}\,[D(i\omega)] = 0, \qquad v = \mathrm{Im}\,[D(i\omega)] = 0,$$

а критерий Найквиста — в виде определения действительных корней трансцендентных уравнений

$$|w(i\omega)| = 1, \qquad \arg[w(i\omega)] = -\pi.$$

Ясно, что определение действительных корней трансцендентного уравнения значительно более трудная задача по сравнению с вычислением определенного интеграла.

ЕрНИИММ Поступило 25.IX.1970.

Վ. Ս. ՄԿՐՏՉՅԱՆ, Գ. Հ. ՄԵԼՔՈՒՄՅԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ԴԻՍԿՐԵՏ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԵՎ ՆՐԱ ՈՐԱԿԻ ԳՆԱՀԱՏՈՒՄԸ

Ամփոփում

Գծային դիսկրետ սիստեմների կայունության որոշման համար առաջարկվում է նոր չափանիշ՝ հիմնված բնութագրիչ բազմանդամի արգումենտի ածանցյալի հատկությունների վրա։ Այդ չափանիշը հարմար է մաթեմատիկական մեքենաների կիրառմամբ բարձր կարգի սիստեմների ուսումնասիրության համար, քանի որ կայունության որոշման խնդիրը բերվում է որոշյալ ինտեգրալի հաշվման։

Դիտվող սիստեմների որակի գնահատման համար ստացված է բնութագրիչ բազմանդամի արմատների մոդուլի վերին սահմանը՝ արտահայտված այդ բազմանդամի արգումենտի ածանցյալի մեծագույն արժեքի միջոցով։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цыпкин Я. З.* Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, М., 1963.
2. *Джури Э.* Импульсные системы автоматического регулирования. Физматгиз, М., 1963.
3. Теория автоматического управления. Часть 1., под ред. Нетушила А. В. „Высшая школа", М., 1968.
4. *Ту Юлиус Т.* Цифровые и импульсные системы автоматического управления. „Машиностроение", М., 1964.
5. *Мелкумян Д. О.* Исследование систем автоматического управления методом производной аргумента. Автореферат диссертации, Харьков, 1969.
9. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ. „Наука", М., 1969.