

С. А. МОЛАСЯН

К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ ДВУХМАССНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПО ВИБРИРУЮЩЕЙ ШЕРОХОВАТОЙ ПЛОСКОСТИ

В статье рассматривается движение двухмассной системы по вибрирующей шероховатой плоскости (рис. 1). Основное тело массой m_1 расположено на шероховатой плоскости. Дополнительная масса m_2 , связанная с основным телом линейным упругим и демпфирующим элементами, может перемещаться относительно основного тела. Линия, по которой перемещается масса m_2 , наклонена к плоскости основания тела массой m_1 под некоторым углом γ , который может меняться от нуля до 180° .

На рис. 1 координатная система $O_1\gamma$ является неподвижной, относительно нее рассматривается движение плоскости. xOy является подвижной системой координат, связанной с вибрирующей плоскостью, относительно которой рассматривается движение массы m_1 . Другую систему uO_2v , относительно которой рассматриваем движение массы m_2 , берем связанной с телом m_1 . Ось O_2u этой системы направим вдоль линии относительного перемещения массы.

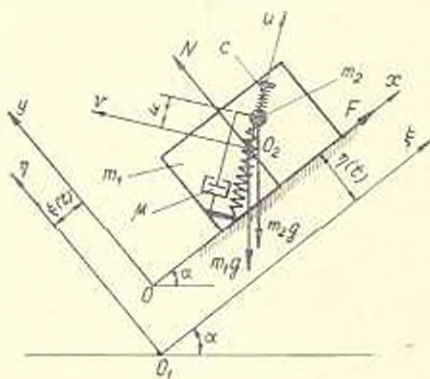


Рис. 1.

Рассматриваемая колебательная система имеет три степени свободы; за обобщенные координаты принимаем декартовы координаты x и y центра тяжести тела m_1 и относительное смещение массы m_2 , отчитываемое от положения, соответствующего недеформированному состоянию пружины. Будем предполагать, что положение совпадает с центром тяжести массы m_1 . Принимаем, что между основной массой m_1 и плоскостью действует сила сухого (кулонова) трения.

Приведем уравнения движения при относительном покое опорной массы m_1 . Допустим, что плоскость колеблется по закону

$$\xi = \xi(t); \quad \eta = \eta(t). \quad (1)$$

Пользуясь уравнениями Лагранжа второго рода, получим следующие дифференциальные уравнения абсолютного движения рассматриваемой колебательной системы:

$$m_2 \ddot{u} + \mu \dot{u} + cu = -m_2(\ddot{z} \cos \gamma + \ddot{\eta} \sin \gamma) - P_2 \sin(\alpha + \gamma); \quad (2)$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{z} + m_2 \cos \gamma \ddot{u} = F - (P_1 + P_2) \sin \alpha; \quad (3)$$

$$(m_1 + m_2) \ddot{\eta} + m_2 \sin \gamma \ddot{u} = N - (P_1 + P_2) \cos \alpha, \quad (4)$$

где P_1 и P_2 — соответственно веса основного и дополнительного тел; F — сила сухого трения; N — нормальное давление системы на вибрирующую плоскость.

При помощи (2) можно определить закон движения дополнительной массы m_2 , а затем на основании (3) и (4) найти силы F и N , действующие со стороны вибрирующей плоскости. Отметим, что система действительно находится в состоянии относительного покоя, если выполняются условия:

$$N(t) > 0; \quad |F(t)| < f_1 N(t), \quad (5)$$

где f_1 — коэффициент трения покоя.

Теперь предположим, что вместо условия (5) выполняется условие

$$N(t) > 0; \quad |F(t)| > f_1 N(t), \quad (6)$$

тогда рассматриваемая система начинает двигаться по вибрирующей шероховатой плоскости.

Для получения уравнений движения системы в этом случае можно в уравнениях (2), (3) и (4) заменить координату z на $z + x$, а координату η на $\eta + y$.

Тогда, вместо уравнений (2), (3) и (4) получим следующие уравнения движения системы:

$$m \ddot{x} = -m \ddot{z} - m_2 \cos \gamma \ddot{u} - mg \sin \alpha + F; \quad (7)$$

$$m \ddot{y} = -m \ddot{\eta} - m_2 \sin \gamma \ddot{u} - mg \cos \alpha + N; \quad (8)$$

$$u + 2nu + k^2 u = -(\ddot{z} \cos \gamma + \ddot{\eta} \sin \gamma) - (x \cos \gamma + y \sin \gamma) - g \sin(\alpha + \gamma), \quad (9)$$

где

$$2n = \frac{\mu}{m_2}; \quad k^2 = \frac{c}{m_2}; \quad m = m_1 + m_2. \quad (10)$$

При этом, если тело m_1 не отрывается от плоскости, т. е. $N(t) > 0$, то сила сухого трения определяется равенствами

$$F = \begin{cases} -fN & \text{при } \dot{x} > 0 \\ fN & \text{при } \dot{x} < 0 \end{cases} \quad (11)$$

(f —коэффициент трения скольжения), а координата $y=0$. В данном случае из уравнения (8) при $y=0$ получим

$$N(t) = m_1 \ddot{\eta} + m_2 \sin \gamma \ddot{u} + mg \cos \alpha. \quad (12)$$

При учете равенств (11) и (12) уравнение (7) относительного движения колебательной системы запишется в следующем виде:

$$\ddot{x} = -(\ddot{\xi} \pm f \ddot{\eta}) - v \frac{\cos(\gamma \mp \varphi)}{\cos \varphi} \ddot{u} - g \frac{\sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi}, \quad (13)$$

где

$$v = \frac{m_2}{m_1 + m_2}; \quad \varphi = \arctg f. \quad (14)$$

В уравнении (13), как и всюду в дальнейшем, верхние знаки соответствуют скольжению колебательной системы по плоскости вперед ($x > 0$), нижние—скольжению назад ($x < 0$).

Из уравнения (9) при учете $y=0$ получим уравнение движения дополнительного тела при движении системы по плоскости:

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2 u = -(\ddot{\xi} \cos \gamma + \ddot{\eta} \sin \gamma) - g \sin(\alpha + \gamma) - \ddot{x} \cos \gamma. \quad (15)$$

Итак, при

$$\dot{x} \neq 0, \quad N(t) > 0, \quad y \equiv 0 \quad (16)$$

получим систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{x} = -(\ddot{\xi} \pm f \ddot{\eta}) - v \frac{\cos(\gamma \mp \varphi)}{\cos \varphi} \ddot{u} - g \frac{\sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi}; \quad (17)$$

$$\ddot{u} + 2n\dot{u} + k^2 u = -(\ddot{\xi} \cos \gamma + \ddot{\eta} \sin \gamma) - g \sin(\alpha + \gamma) - \ddot{x} \cos \gamma,$$

описывающую движение колебательной системы по вибрирующей шероховатой плоскости.

Допустим, что плоскость движется относительно неподвижных осей ξ, O, η по гармоническому закону:

$$\ddot{\xi} = A \cos(\omega t + \varepsilon); \quad \ddot{\eta} = B \sin \omega t. \quad (18)$$

Подставляя значения $\ddot{\xi}$ и $\ddot{\eta}$ в (17), получим уравнения движения для этого случая.

Предполагая, что движение системы по плоскости характеризуется следующими начальными условиями:

$$t = t^* \quad u(t^*) = u^*, \quad \dot{u}(t^*) = \dot{u}^*, \quad x(t^*) = 0 \quad \text{и} \quad \dot{x}(t^*) = \dot{x}^*, \quad (19)$$

получим решение задачи в следующем виде:

$$x(t) = x^* + a_1 \cos(\omega t - \psi_1) + a_2 \cos(\omega t^* - \psi_1) - \\ - v \frac{\cos(\gamma \mp \varphi)}{\cos \varphi} u(t) + v \frac{\cos(\gamma \mp \varphi)}{\cos \varphi} u^* - g \frac{\sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi} (t - t^*); \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 x(t) = & a_{1\pm} \sin(\omega t - \psi_{1\pm}) - a_{1\pm} \sin(\omega t^* - \psi_{1\pm}) - \\
 & - a_{1\pm} \omega \cos(\omega t^* - \psi_{1\pm})(t - t^*) - v \frac{\cos(\gamma \mp \varphi)}{\cos \varphi} [u(t) - u(t^*)] + \\
 & + v \frac{\cos(\gamma \mp \varphi)}{\cos \varphi} u^*(t - t^*) - g \frac{\sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi} \cdot \frac{(t - t^*)}{2} + x^*(t - t^*). \quad (21)
 \end{aligned}$$

Здесь u и u определяются из следующего уравнения:

$$u + 2n_{\pm} u + k_{\pm}^2 u = a_{2\pm} \sin \omega t - a_{1\pm}, \quad (22)$$

где

$$\begin{aligned}
 n_{\pm} &= \frac{n}{1 - \frac{v \cos(\gamma \mp \varphi) \cos \gamma}{\cos \varphi}}; & k_{\pm}^2 &= \frac{k^2}{1 - \frac{v \cos(\gamma \mp \varphi) \cos \gamma}{\cos \varphi}}; \\
 a_{2\pm} &= \frac{B \sin(\gamma \mp \varphi)}{\cos \varphi - v \cos \gamma \cdot \cos(\gamma \mp \varphi)}; \\
 a_{1\pm} &= \frac{g [\sin(\alpha + \gamma) \cos \varphi - \cos \gamma \cdot \sin(\alpha \mp \varphi)]}{\cos \varphi - v \cos \gamma \cdot \cos(\gamma \mp \varphi)}.
 \end{aligned}$$

При определении скорости и перемещения системы перемещение дополнительного тела надо определить из уравнения (22).

Формулы (20) и (21) описывают движение колебательной системы до тех пор, пока основная масса m_1 не остановится относительно плоскости^{*}.

Из выражения (20) вытекает, что какова бы не была начальная скорость x^* , при $|a| < \varphi$ существует момент времени, в котором колебательная система непременно остановится. Действительно, $x(t)$ в начальный момент $t=t^*$ совпадает с x^* , а при достаточно большом t она имеет знак, противоположный знаку x^* . Поэтому, в силу непрерывности функции $x(t)$, непременно существует такой момент времени $t=t^{**} > t^*$, в котором скорость колебательной системы обращается в нуль. Из сказанного следует, что при изучении движения системы можно, не ограничивая общности, считать, что начальная скорость x^* равна нулю. После остановки системы возможно три типа движения: 1) мгновенно начинающееся скольжение вперед ($x > 0$), 2) мгновенно начинающееся скольжение назад ($x < 0$), 3) длительная остановка ($x = 0$).

Как было отмечено, движущаяся система навсего останавливается. Поэтому необходимо установить связь между моментом начала скольжения системы после ее остановки и моментом следующей остановки.

^{*} Под остановкой подразумевается обращение в нуль относительной скорости массы m_1 . Остановка может быть мгновенной или означать переход в состояние относительного покоя. В последнем случае остановка называется длительной.

Обозначив соответственно через $\delta_{\pm}^* = \omega t^*$, $\delta_{\pm}^* = \omega t^*$ фазовые углы, отвечающие моментам начала скольжения вперед и назад, а через $\varphi_{\pm} = \omega t^{**}$ и $\varphi_{\pm} = \omega t^{**}$ — фазовые углы, отвечающие моментам остановки после скольжения вперед и назад, запишем уравнение (20) для случая $x^* = 0$ в следующей форме:

$$\cos(\varphi_{\pm} - \psi_{1\pm}) = \cos(\delta_{\pm}^* - \psi_{1\pm}) + Z_{\pm}(\varphi_{\pm} - \delta_{\pm}^*) + \frac{\gamma \cos(\gamma \mp \varphi)}{a_{1\pm} \omega \cos \varphi} \left[u\left(\frac{\varphi_{\pm}}{\omega}\right) - u\left(\frac{\delta_{\pm}^*}{\omega}\right) \right], \quad (23)$$

где

$$Z_{\pm} = \frac{g}{a_{1\pm} \omega^2} \cdot \frac{\sin(\alpha \pm \varphi)}{\cos \varphi}. \quad (24)$$

Определив моменты перехода, можно найти перемещение системы $S_{\pm}$ по вибрирующей плоскости за один этап. При этом, в соответствии со сказанным выше, можно ограничиться рассмотрением случая, когда скольжение начинается из состояния относительного покоя. Тогда, согласно равенству (21) имеем:

$$\begin{aligned} S_{\pm} = x(t^{**}) = & a_{1\pm} \sin(\varphi_{\pm} - \psi_{1\pm}) - a_{1\pm} \sin(\delta_{\pm}^* - \psi_{1\pm}) - \\ & - a_{1\pm} \cos(\delta_{\pm}^* - \psi_{1\pm})(\varphi_{\pm} - \delta_{\pm}^*) + \frac{\gamma \cos(\gamma \mp \varphi)}{\omega \cos \varphi} u^*\left(\frac{\delta_{\pm}^*}{\omega}\right)(\varphi_{\pm} - \delta_{\pm}^*) - \\ & - \frac{g \sin(\alpha \pm \varphi)}{2\omega^2 \cos \varphi} (\varphi_{\pm} - \delta_{\pm}^*)^2 - \frac{\gamma \cos(\gamma \mp \varphi)}{\cos \varphi} \left[u\left(\frac{\varphi_{\pm}}{\omega}\right) - u^*\left(\frac{\delta_{\pm}^*}{\omega}\right) \right]. \end{aligned} \quad (25)$$

Деминикавский филиал
Ереванского политехнического института
им. К. Маркса

Поступило 4.VI.1970.

Ս. Ա. ՄՈԼՅԱՆ

ԹՐԹՈՒՅՑՈՂ ԱՆՀԱՐԹ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ ԵՐԿՈՒ ՄԱՍՍԱՅՈՎ
ՏԱՏԱՆՈՂԱԿԱՆ ՍԻՍՏԵՄԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՂՋ

Ա Վ Փ Ո Վ Ո Ւ Մ

Հոդվածում ուսումնասիրվում է հրկու մասսայով սիստեմի շարժումը թրթուղոյ անհարթ հարթության վրայով: Հիմնական մասսան դառնում է թրթուղոյ հարթության վրա, նրան առաձգական մարմնի օգնությամբ ամրացված է հրկրորդ լրացուցիչ մասսան, որը կարող է շարժվել առաջինի նկատմամբ:

Ստացված է ուսումնասիրվող սիստեմի շարժման հավասարումը թրթուղոյ հարթության վրա շարժվելիս (20) տեսքով: Ըստ էության ինտեգրման

միջոցով ստացված է սխեմների շարժման արագությունը և տեղափոխումը (41) և (42) տեսքով: Ստացված է նաև մի էտալից մյուսին անցնելու ժամանակամիջոցի որոշման համար (43) բանաձևը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Блехман И. И., Джанелидзе Г. Ю. Вибрационное перемещение. Изд. „Наука“, 1964.
2. Блехман И. И., Гортинский В. В., Птушкина Г. Е. Движение частицы в колеблющейся среде при наличии сопротивления типа сухого трения. К теории вибрационного разделения сыпучих смесей. Известия АН СССР ОТН. „Механика и машиностроение“, № 4, 1963.
3. Якимова К. С. Вибрационное перемещение двухмассной колебательной системы. Известия АН СССР. „Механика твердого тела“, № 5, 1969.