

Р. М. БАРСЕГЯН

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В СЛОИСТЫХ ПЛАСТАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ МОЩНОСТЯМИ И КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФИЛЬТРАЦИИ СЛАБОПРОНИЦАЕМЫХ ПРОСЛОЕК

В задачах о фильтрации жидкости в гидравлически связанных подоносных горизонтах мощности слабопроницаемых прослоек, разделяющих водоносные горизонты, обычно осредняются по высоте, вследствие чего движение жидкости рассматривается в горизонтально залегаемых горизонтах.

Представляет интерес произвести оценку практической допустимости осреднения мощностей слабопроницаемых прослоек. В статье производится такая оценка путем сравнения решений для двух типовых задач, относящихся к модели Мятиепа-Гиринского. Сопоставляются решения задач, найденные без осреднения мощности слабопроницаемой прослойки (точные решения), с решениями с осреднением мощности слабопроницаемой прослойки (приближенные решения).

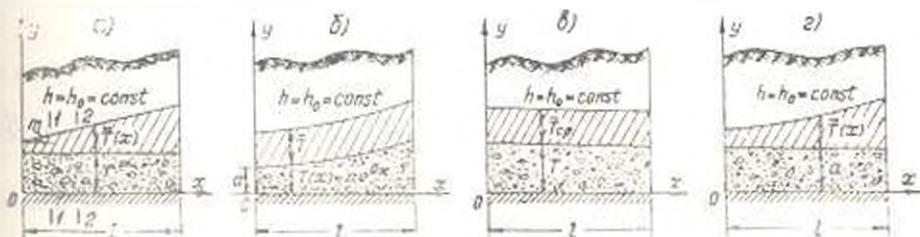


Рис. 1.

Сущность первой задачи заключается в следующем. Требуется найти решение для случая одномерной напорной установившейся фильтрации однородной несжимаемой жидкости (по закону Дарси) в трехслойном недеформируемом массиве при условии, что верхний и нижний слои сильнопроницаемы и разобщены средним слабопроницаемым слоем (рис. 1, а, б и в). В верхнем сильнопроницаемом слое напор $h_0 = \text{const}$. Нижняя и верхняя границы массива являются кровлями водоупора.

1°. Точные решения задач. а) Пусть мощность слабопроницаемой прослойки изменяется по линейному закону (рис. 1, а). Найдем урав-

нение, которому должен удовлетворить напор $h(x)$ в нижнем водоносном горизонте массива. Для этого составим баланс фильтрационного расхода в бесконечно малом отсеке ($1-1, 2-2$) нижнего слоя массива. Согласно закону Дарси удельный фильтрационный расход, поступающий в рассматриваемый отсек через сечение $1-1$, будет $q = -KT \frac{dh}{dx}$. Удельный фильтрационный расход, выходящий через сечение $2-2$, будет $q + dq = q + KT \frac{d^2h}{dx^2} dx$. Следовательно, дефицит количества жидкости в рассматриваемом отсеке за единицу времени составит $-KT \frac{d^2h}{dx^2} dx$. Этот дефицит равен удельному фильтрационному расходу, поступающему через кровлю отсека, равному $-\bar{K} \frac{h - h_0}{T - mx}$.

Отсюда получим уравнение баланса удельного фильтрационного расхода в рассматриваемом отсеке:

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{K(h - h_0)}{KT(T_0 - mx)} = 0, \quad (1)$$

где $m = \alpha g \beta$; K и \bar{K} — коэффициенты фильтрации соответственно водоносного горизонта и слабопроницаемой прослойки; остальные обозначения показаны на рис. 1.

Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$h - h_0 = [C_1 I_1(\xi) + C_2 K_1(\xi)], \quad (2)$$

где

$$\xi = \frac{2}{m} \sqrt{\frac{K(mx + T_0)}{KT}}$$

$I_1(\xi)$ и $K_1(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя первого порядка соответственно первого и второго родов.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 задаемся граничными условиями

$$h|_{x=0} = h_1, \quad h|_{x=l} = h_2. \quad (3)$$

С помощью (3) решение (2) приводится к виду

$$h - h_0 = \xi \left[\frac{(h_1 - h_0) \xi_2 [K_1(\xi_2) I_1(\xi_1) - I_1(\xi_2) K_1(\xi_1)]}{\xi_1 \xi_2 [I_1(\xi_1) K_2(\xi_2) - K_1(\xi_1) I_2(\xi_2)]} + \frac{(h_2 - h_0) \xi_1 [I_1(\xi_1) K_1(\xi_2) - K_1(\xi_1) I_1(\xi_2)]}{\xi_1 \xi_2 [I_1(\xi_1) K_2(\xi_2) - K_1(\xi_1) I_2(\xi_2)]} \right], \quad (4)$$

где

$$\xi_1 = \frac{2}{m} \sqrt{\frac{\bar{K} T_0}{KT}}; \quad \xi_2 = \frac{2}{m} \sqrt{\frac{\bar{K}(ml + T_0)}{KT}}$$

Отметим, что при достаточно малых $\bar{K}K$ (например, при $\bar{K}K \leq 0,001$) можно воспользоваться выражением

$$h = h_0 + (mx + \bar{T}_0) \left[\frac{(h_1 - h_0)(ml - \bar{T}_0) \ln \left| \frac{ml - \bar{T}_0}{mx + \bar{T}_0} \right|}{T_0(mx + \bar{T}_0) \ln \frac{ml + \bar{T}_0}{\bar{T}_0}} - \frac{(h_2 - h_0)\bar{T} \ln \left| \frac{mx + \bar{T}_0}{\bar{T}_0} \right|}{\bar{T}_0(mx + \bar{T}_0) \ln \frac{ml + \bar{T}_0}{\bar{T}_0}} \right] \quad (5)$$

которое можно получить из (4), если удовлетвориться только первыми членами рядов функций $I_1(z)$ и $K_1(z)$.

б) Пусть требуется найти напор $h = h(x)$ нижнего водоносного горизонта при схеме, приведенной на рис. 1, б. Эта задача отличается от первой тем, что мощности слабопроницаемой прослойки и основного водоносного горизонта изменяются по экспоненциальному закону.

Как и в предыдущем случае находим, что напор $h = h(x)$ удовлетворяет уравнению [1]:

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{T(x)}{T(x)} \frac{dh}{dx} - \frac{\bar{K}(h - h_0)}{KT(x)\bar{T}(x)} = 0, \quad (6)$$

где $T(x) = ae^{bx}$ и $\bar{T}(x) = \mu ae^{bx}$ — соответственно мощности нижнего водоносного горизонта и слабопроницаемой прослойки;

$$T(x) = abe^{bx};$$

a, b и μ — постоянные.

При граничных условиях (3) решение уравнения (6) имеет вид:

$$h = h_0 + \frac{(h_1 - h_0) \operatorname{sh} l \sqrt{\xi_1 - \xi_2} + (h_2 - h_0) \operatorname{sh} l \sqrt{\xi_2 - \xi_1}}{\operatorname{sh} l \sqrt{\xi_1 - \xi_2}} \quad (7)$$

где

$$\xi_1 = -\frac{e^{-bx}}{ab} + \xi_1, \quad \xi_2 = \frac{1}{ab} + \xi_2, \quad \xi_1 = \frac{e^{-bx}}{ab} + \xi_1, \quad \xi_2 = \frac{\bar{K}}{K\mu}$$

2. **Приближенные решения задач.** При усреднении мощности слабопроницаемой прослойки (для двух вышеперечисленных задач) слои пласта становятся горизонтальными (рис. 1, в). В этом случае напор $h = h(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{\bar{K}}{KT\bar{T}_{cp}} (h - h_0) = 0, \quad (8)$$

решение которого при граничных условиях (3) имеет вид:

$$h = h_0 - \frac{(h_1 - h_0) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{K}{KT T_{c1}} (l-x)} + (h_0 - h_2) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{K}{KT T_{c1}} x}}{\operatorname{sh} \sqrt{\frac{K}{KT T_{c1}} l}} \quad (9)$$

где

$$K = \frac{K}{KT T_{c1}}$$

Осреднение мощности слабопроницаемой прослойки по высоте для второй задачи в отличие от первой (где осреднение было произведено в пределах верхнего горизонта) плечет за собой осреднение мощности водоносного горизонта. Естественно, что в этом случае ожидаемое расхождение между значениями напоров, вычисленными точным и приближенным методами, будет значительное.

Сопоставлением величин напоров, вычисленных по формулам (4), (7) и (9) (соответственно: $h = h_1$, $h = h_1$ и $h = h_0$) при одинаковых параметрах, входящих в эти формулы, можно судить о степени расхождения между значениями напоров в одних и тех же сечениях. В табл. 1 приводятся результаты вычислений при следующих исходных данных: $h_0 = 20$ м; $\beta = 5^\circ$; $T_2 = 10$ м; $l = 1000$ м; $T = 20$ м [по формулам (4) и (9)]; $K = 0,001$ м/сутки; $K' = 0,1$ м/сутки. При значениях $\mu = 6,25$ и $b = 0,002$ осредненные по высоте мощности слабопроницаемой прослойки и нижнего водоносного горизонта второй задачи совпадают с соответственными мощностями слоев первой задачи. В четвертой и пятой строках таблицы приложены значения напоров h_1 и h_0 , вычисленные по формуле (7), и h_1' — по формуле (9) при $K/K' = 0,0001$.

Таблица 1

Сечения, x в м		0	100	200	500	800	900	1000
Напоры в м	h_1	40	33,6	31,0	32,7	43,4	51,5	60
	h_0	40	35,7	32,8	32,0	42,3	49,7	60
	h_1	40	30,9	28,3	26,0	51,1	57,0	60
	h_1'	40	44,0	47,7	54,1	58,0	59,2	60
	h_0'	40	42,5	44,0	50,0	56,0	58,0	60

Как видно из таблицы, расхождение между точными и приближенными значениями напоров при $0,01 K \ll K'$ значительное и при изучении фильтрации на больших территориях не следует им пренебречь.

Таким образом, при решении конкретных задач фильтрации в многослойных пластах осреднение мощностей слабопроницаемых прослоек с требуемой точностью в большинстве случаев можно считать

нецелесообразным. Осреднение особенно недопустимо, если оно влечет за собой осреднение мощностей водоносных горизонтов.

Ниже дается решение некоторых конкретных задач фильтрации жидкости в многослойных пластах без осреднения мощностей слабопроницаемых прослоек. Получены уравнения движения и найдены их решения.

1. Рассмотрим фильтрацию жидкости в прямоугольном массиве, вертикальное сечение которого приведено на рис. 1, г. Требуется найти напор нижнего водоносного горизонта, если мощность слабопроницаемой прослойки изменяется по закону

$$T(x) = ae^{bx},$$

где a и b — постоянные.

Искомый напор $h(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{\bar{K}}{KTab} e^{-bx} (h - h_0) = 0. \quad (10)$$

Решением уравнения (10) является

$$h(x) = h_0 - J_0(2\gamma \int_0^x e^{-\frac{bx}{2}} dx) \left[C_1 - bC_2 \int_0^x \frac{dx}{J_0(2\gamma e^{-\frac{bx}{2}})} \right],$$

где J_0 — функция Бесселя; $\gamma^2 = \frac{\bar{K}}{KTab^2}$; C_1 и C_2 — постоянные, определяемые с помощью граничных условий, которые могут быть 1-го, 2-го или 3-го родом.

2. Пусть требуется найти напор $h = h(x)$ нижнего водоносного горизонта для схемы рис. 1, а при условии, что коэффициент фильтрации слабопроницаемой прослойки $\bar{K}(x)$ — линейная функция

$$\bar{K}(x) = \bar{K}_1 + \frac{\bar{K}_2 - \bar{K}_1}{l} x,$$

где \bar{K}_1 и \bar{K}_2 — коэффициенты фильтрации слабопроницаемой прослойки соответственно в сечениях $x = 0$ и $x = l$.

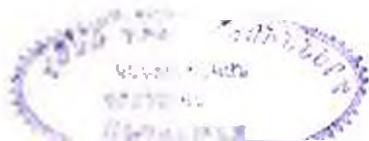
Искомый напор $h(x)$ нижнего водоносного горизонта удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{\bar{K}_1 l - (\bar{K}_2 - \bar{K}_1)x}{lKT(2mx - T_0)} (h - h_0), \quad (11)$$

С помощью подстановки

$$h - h_0 = \frac{l}{2p} e^{-\frac{t}{2}} H(t)$$

уравнение (11) преобразуется к вырожденному гипергеометрическому уравнению



$$t \frac{d^2 H}{dt^2} + (2-t) \frac{dH}{dt} - \left(1 - \frac{q}{2p}\right) H = 0, \quad (12)$$

где

$$p = \frac{\bar{K}_2 - \bar{K}_1}{l(KTm)^3}; \quad q = \frac{l\bar{K}_1 KTm - KTT_0(\bar{K}_2 - \bar{K}_1)}{l(KTm)^3}.$$

Общее решение уравнения (12) имеет вид:

$$H(t) = C_1 F(n, 2, t) + (n-1) C_2 [F(n, 2, t) \ln t + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k-1)}{2 \cdot 3 \cdots (2+k-1)k!} t^k \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{n+j} - \frac{1}{2-j} - \frac{1}{1-j} \right)],$$

где

$$F(n, 2, t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k-1)}{2 \cdot 3 \cdots (2+k-1)k!} t^k$$

— вырожденная гипергеометрическая функция; $n = 1 + \frac{q}{2p}$. Для определения постоянных C_1 и C_2 задаются граничные условия (1-го, 2-го или 3-го родов).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 8.11.1971.

В. В. БАРУБЕГЯН

ՀԵՂՈՒԿԻ ՅԻԼՏՐԱՑԻԱՆ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀՉՈՐՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՅԻԼՏՐԱՑԻԱՅԻ
ԳՈՐԾԱԿԻՅ ՈՒՆԻՑՈՂ ՎԱՏ ԹԱՓԱՆՅՈՂ ՄԻՋԱՆՇԵՐՏԵՐՈՎ
ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՀՈՂԱՇԵՐՏԵՐՈՒՄ

Ս. Վ Փ Ո Փ Ո Վ

Բազմաշերտ հողաշերտերում հեղուկի ֆիլտրացիայի վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս սովորաբար վատ ֆափանցող շերտերի հորսովյունները միջինացնում են, որի հետևանքով շերտերը ստանում են հորիզոնական դասավորություն:

Հսկայաճում լուծված են խնդիրներ առանց միջինացնելով բաժանող վատ ֆափանցող շերտի հորսովյունը: Այդ լուծումները նախատեսվում են նույն խնդիրների լուծումների հետ՝ միայն վատ ֆափանցող շերտի միջինացրած հորսովյունը: Պարզվում է, որ շատ զեղյակներում այդ միջինացումը անփոխարինելի է: Լուծված են նաև մի քանի խնդիրներ, երբ վատ ֆափանցող շերտի հորսովյունը և ֆիլտրացիայի գործակիցը փոփոխական են:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Барсегиан Р. М. Некоторые задачи неравномерной фильтрации в многослойных пластах. «Известия АН Арм. ССР, Механика», № 6, 1970.