

ЛИТЕРАТУРА

1. Методика статистической обработки информации данных, ГТМ-44-62. Изд. Комитета стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР, М., 1966.
2. Пьявский Н. А. Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкций, изд. «Машиностроение», М., 1967.
3. Гродисман Н. С., Рыжик Н. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

Г. М. АСРИЯН

КОЛЕБАНИЯ ВАЛА С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ В КРУГОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ СВЯЗИ С ДВИГАТЕЛЕМ И РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ В МАТЕРИАЛЕ

Рассмотрим сердечник с распределенными по длине массовыми, упругими и магнитными параметрами.

Выражения для компонентов сил магнитного притяжения согласно [1] будут:

$$\begin{aligned} P_x &= P_x; \quad P_y = P_y; \\ P &= \frac{k B^2}{4\pi} \frac{\chi m}{\text{см}} = \frac{\pi d}{8} \left(\frac{B}{5000} \right)^2 \frac{\kappa l}{\text{см}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для простоты в (1) принято, что распределение магнитной индукции не зависит от продольной координаты z , а также от r , т. е. $B(z, r) = B = \text{const}$.

Исследуем колебания вращающегося сердечника с погонной массой m , помещенного в середине прямого вала, изгибная жесткость которого EJ . Две балки массы сердечника относительно точки прикрепления сердечника к валу характеризуются эксцентриситетом e . Будем предполагать, что точка приложения равнодействующей магнитных сил и центр тяжести сердечника совпадают. Упругое и гистерезисное отклонения от закона Гука при изгибных колебаниях будем учитывать согласно [2]. Дифференциальные уравнения вращательных колебаний круглого сердечника с вертикально расположенным валом в магнитном поле запишутся в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[EJ \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \right] + m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - P_x - x \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EJ(k + l^2) \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)^2 \right] &= \\ &= -eq \cos \varphi, \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[EJ \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} \right] + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - P_y - y \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left[EJ(k + l^2) \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)^2 \right] &= \\ &= -eq \sin \varphi, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \varepsilon \left\{ \begin{aligned} & \varepsilon q (x \sin \varphi - y \cos \varphi) - EI (y^{IV} - x^{IV}), \end{aligned} \right. \quad (2)$$

где ε — малый положительный параметр, указывающий на то, что соответствующие члены системы (2) малы. Первые два уравнения системы (2) представляют движение центра массы сердечника, и последнее уравнение является уравнением моментов относительно точки O , (рис. 1).

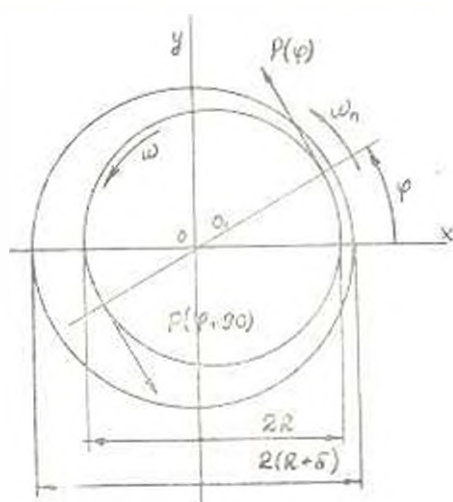


Рис. 1.

Решение первых двух уравнений системы (2) будем искать в виде

$$x = f(s) a_x \cos \varphi_x; \quad (3)$$

$$y = f(s) a_y \cos \varphi_y; \quad (4)$$

где $\varphi_x = \varphi - \varphi_x$; $\varphi_y = \varphi + \varphi_y$; $f(s)$ — функция прогиба, представляющая собой решение невозмущенного уравнения, т. е. из первых двух уравнений системы (2) при $\varepsilon = 0$ соответствующих граничных условиях.

Для условий шарнирного закрепления

$$f(s) = \sin \frac{\pi n}{l} s. \quad (5)$$

Амплитуда a и фаза φ должны быть определены из следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \varepsilon A_1(a) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \omega - \varepsilon B_1(a) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Для решения задачи в первом приближении нужно знать A_1 и B_1 , которые определяются формулами [3]:

$$\begin{aligned}
 A_1(a) &= -\frac{1}{2\pi M \omega_0} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\left(\sin \frac{\pi n}{l} s\right) \sin \varphi d\varphi ds; \\
 B_1(a) &= -\frac{1}{2\pi M \omega} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q\left(\sin \frac{\pi n}{l} s\right) \cos \varphi d\varphi ds; \\
 M &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} m\left(\sin \frac{\pi n}{l} s\right) ds,
 \end{aligned} \quad (7)$$

где Q — функция рассеяния энергии после подставления решения в первом приближении (5).

$$\begin{aligned}
 Q = N &\left\{ \left[-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} s \cos(\varphi + \theta) \right]^2 \times \right. \\
 &\times \left[\left(\frac{\pi n}{l}\right)^4 \sin \frac{\pi n}{n} s \cos(\varphi + \theta) \right] + \\
 &+ 2 \left[-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} s \cos(\varphi + \theta) \right] \times \\
 &\times \left[-\left(\frac{\pi n}{l}\right)^3 \cos \frac{\pi n}{l} s \cos(\varphi + \theta) \right] \left. \right\}.
 \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $N = 3Elj(k + l^2)$; $j = l \left| \frac{3}{m+3} \left(\frac{h}{2}\right)^m \right|$; h — высота (диаметр) сечения стержня; m — четное целое число; k, l — коэффициенты упругого и гистерезисного отклонений от закона Гука; i — множитель сдвига фаз, производящий изменение фазы на ± 2 и гистерезисное отклонение (считаем этот угол независимым от амплитуд деформации).

Перейдем к расчету вынужденных колебаний.

Частное решение первых двух уравнений системы (2) с правой частью, в первом приближении, выражается формулами (3), (4) и (5). Амплитуды a и угол сдвига фаз θ определяются из уравнений (9) согласно [3]:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= A_1(a) - \frac{A}{(\omega - \varpi)M} \sin \theta; \\
 \frac{d\theta}{dt} &= (\omega - \varpi) + B_1(a) - \frac{A}{aM(\omega - \varpi)} \cos \theta; \\
 A &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} q(s) f(s) ds,
 \end{aligned} \quad (9)$$

где $q(s)$ — интенсивность возмущающей нагрузки. Коэффициенты $A_1(a)$, $B_1(a)$ уравнений первого приближения (9) вычисляются по формуле (7), если задана функция рассеяния энергии.

Уравнение моментов из (2) с учетом (3) и (4) после несложных выкладок приводится к виду:

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = \dot{\varphi}(\dot{z}) - [a \cos(\dot{\varphi} - \theta) \sin \dot{z} - a \cos(\dot{\varphi} + \theta) \cos \dot{z}] - \left\{ \eta q \left(\sin \frac{\pi n}{l} s \right) - EI \left[\left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 \sin \frac{\pi n}{l} s \right] \right\}. \quad (10)$$

Если ввести допущение, что в течение периода колебаний момент привода мало отличается от момента сил сопротивления, т. е. разность $L(\dot{\varphi}) - \eta q$ мала, то $\frac{d\dot{z}}{dt}$ можно также считать пропорциональной малому параметру, а $\dot{\varphi}$ полагать медленно изменяющейся функцией времени. Координату z можно рассматривать как квазициклическую и усреднить по ней уравнение (10), которое окончательно примет вид:

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = \dot{\varphi}(\dot{z}) - \frac{a}{2} \sin \theta - \frac{a}{2} \cos \theta. \quad (11)$$

Уравнения (9) и (11) образуют систему, эквивалентную системе (2), а величины a , θ , $\dot{\varphi}$ в общем случае определяются как интегралы этих уравнений.

Далее будем различать следующие два типа режимов движения изучаемой системы: режимы стационарного движения и режимы нестационарного движения.

Режимы стационарного движения характеризуются тем, что они протекают при постоянных значениях величин a , θ , $\dot{\varphi}$. В режимах нестационарного движения величины a , θ , $\dot{\varphi}$ могут изменяться в зависимости от t или l .

В соответствии с таким определением в стационарных режимах движения должно быть

$$\frac{d\dot{z}}{dt} = 0, \quad \frac{da}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta}{dt} = 0. \quad (12)$$

Тогда, согласно (9), (11) и (12), получим:

$$\left. \begin{aligned} A_1(a) - \frac{A}{(n-\pi)M} \sin \theta &= 0, \\ (n-\pi) - B_1(a) - \frac{A}{aM(n+\pi)} \cos \theta &= 0, \\ \dot{\varphi}(\dot{z}) - \frac{a}{2} \sin \theta - \frac{a}{2} \cos \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Поэтому значения a , θ , $\dot{\varphi}$ при стационарных режимах движения определяются как корни системы (13). Отсюда находим:

$$\frac{\dot{\varphi}}{\omega^2} = 1 - \frac{A}{aM\omega^2} \left| \cos \theta - \frac{B_1(a)}{A_1(a)} \sin \theta \right|; \quad (14)$$

$$\sin \theta = \frac{2\omega MA_1(a)}{A}$$

Интегрирование (13) выполнено при начальных значениях a_0 , θ_0 и $\dot{\varphi}_0$, соответствующих стационарному режиму движения в точке D , а параметры системы имеют следующие значения:

$$r = 2 \cdot 10^{-2} \text{ мм}; \quad k = 0,8 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{см}}; \quad \dot{\varphi} = 184 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$m = 0,7 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{см}}; \quad I = 0,32 \text{ кгм} \cdot \text{сек}^2; \quad a = 0,12 \text{ мм};$$

$$\theta = 84; \quad \gamma = 0,28 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}}{\text{см}}; \quad \omega_0 = 196 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Результаты интегрирования в виде графиков $a(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ представлены на рис. 2. Кривая 2 характеризует прохождение через первую критическую скорость, при этом система стремится к стационарному значению $a = 0,2 \text{ мм}$ и $\dot{\varphi} = 212$ $\frac{1}{\text{сек}}$, соответствующему точке B на рис. 2.

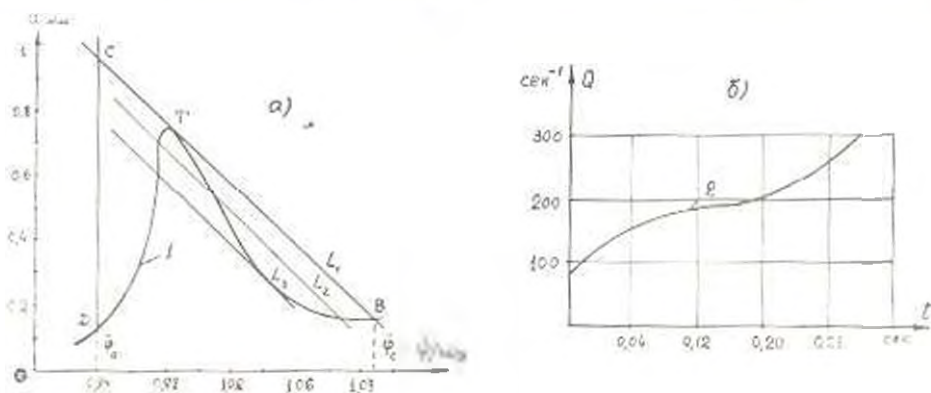


Рис. 2.

Полученные результаты позволяют заключить, что нестационарные режимы движения систем с малой нелинейностью при прохождении через резонанс имеют такие же специфические особенности изменения частоты, которые обнаруживаются у линейных систем. Представление о характере изменения амплитуды и частоты колебаний дают графики на рис. 2. а и б. Характеристика источника энергии L выбиралась так, чтобы избыточная мощность была минимальной, чтобы график L проходил через точку T (рис. 2, а).

Величина углового ускорения $\frac{d\dot{\varphi}}{dt}$ сильно изменяется в процессе прохождения системы через область резонанса. Изменение углового ускорения тесно связано с изменением амплитуды a с увеличением a уменьшается $\frac{d\dot{\varphi}}{dt}$ и наоборот. В резонансной зоне $\frac{d\dot{\varphi}}{dt}$ принимает свое наименьшее значение при максимальном значении a (точка 1 на рис. 2). Однако, так как рассматриваемая система имеет мягкую характеристику нелинейности, то при прохождении указанных систем через резонанс необходимо больше времени, чем для других систем.

ЕО ВНИИЭМ

Поступило 29.X.1970.

ЛИТЕРАТУРА

1. Позняк Э. А. Колебания вращающегося отдельного сердечника в магнитном поле. „Научные доклады высшей школы. Электромеханика и автоматика“, № 1, 1958.
2. Василенко Н. В. Зависимость между напряжением и деформацией в различных изотропных телах. В кн. „Рассеяние энергии при колебаниях упругих систем“. Изд. АН УССР, Киев, 1966.
3. Василенко Н. В. К расчету колебаний с учетом нелинейности. В кн. „Рассеяние энергии при колебаниях систем“. Изд. АН УССР, Киев, 1963.