ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտություններ, սերիա XXIV, № 6, 1971 Серия технических наук

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

Р. А. ПЕТРОСЯНЦ, В. В. ВАРДАНЯН

О ВЫРАВНИВАНИИ НЕКОТОРЫХ ЭМПИРИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ПО ОБОБЩЕННОМУ ЗАКОНУ РЭЛЕЯ

При выборе теоретической функции распределения для выравнивания эмпирических распределений, подчиняющихся закону Рэлея, существенное значение имеет наличие и отсутствие систематического отклонения данных от нуля. Распределения некоторых случайных величин, характеризующих точность обработки в машиностроении (радиальное биение двух номинально соосных цилиндрических поверхностей, непараллельность и перпендикулярность плоскостей, конусность образующих цилиндрических поверхностей и т. п.), обычно выравнивается по закону распределения Рэлея* [1, 2], функция плотности которого имеет вид:

$$\varphi(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \qquad (1)$$

где σ — параметр.

Для данного однопараметрического распределения математическое ожидание и дисперсия будут:

$$\bar{r} = \int_0^\infty r\varphi(r)\,dr = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma, \qquad (2)$$

$$D = \int_0^\infty (r - \bar{r})^2 \varphi(r)\,dr = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right)\sigma^2. \qquad (3)$$

Пусть некоторое эмпирическое распределение определяется частотами m_i, соответствующими интервалам $[r_i - h/2,\ r_i + h/2]$ (h — величина интервалов). Тогда среднее значение и эмпирическая дисперсия будут:

$$\bar{r}_i = \frac{\sum m_i r_i}{\sum m_i}; \qquad (4)$$

* В некоторых литературных источниках указанное распределение называется распределением Максвелла.

$$D_* = \frac{\sum m_i (r_i - \bar{r}_*)^2}{\sum m_i}. \qquad (5)$$

При выравнивании данного эмпирического распределения по теоретическому закону распределения Рэлея принимается $\bar{r} = \bar{r}_*$ и $D = D_*$, тогда на основании (2)—(5) будут две формулы для определения параметра σ:

$$\sigma = \bar{r}_* \sqrt{2}; \qquad (6)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{D_*}{2 - \pi/2}}. \qquad (6')$$

При отсутствии систематической погрешности значения σ, полученные по формулам (6) и (6'), будут достаточно близки, и, принимая одно из них (или их среднее) за значение параметра σ, получим искомое распределение (1). Подобный пример рассмотрен в [1].

В общем же случае, в силу отличия данного эмпирического распределения от теоретического по закону Рэлея, значения σ по формулам (6) и (6') не совпадают. В частности, это происходит в результате того, что рассматриваемая случайная величина имеет также систематическое отклонение от нуля (систематическая погрешность). В этом случае для выравнивания эмпирического распределения примем обобщенный закон распределения Рэлея, имеющий функцию плотности [2]:

$$\varphi(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2 + a^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right), \qquad (7)$$

где I_0 — функция Бесселя нулевого порядка мнимого аргумента.

Это распределение — двухпараметрическое с параметрами a и σ, где a характеризует систематическое отклонение от нуля; при $a = 0$ распределение (7) переходит в (1).

Для математического ожидания и дисперсии по обобщенному закону распределения Рэлея получим:

$$\bar{r} = \int_0^\infty r\varphi(r)\,dr = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma\Phi\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ -\frac{a^2}{2\sigma^2}\right); \qquad (8)$$

$$D = \int_0^\infty (r - \bar{r})^2 \varphi(r)\,dr = 2\sigma^2 + a^2 - \frac{\pi}{2}\sigma^2\Phi^2\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ -\frac{a^2}{2\sigma^2}\right), \qquad (9)$$

где $\Phi(\alpha; \beta; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция [3]. Для определения параметров a и σ приравняем среднее значение $\bar{r}_*$ и эмпирическую дисперсию D_*, определяемые по (4) и (5), значениям $\bar{r}$ и D, определяемым по (8) и (9); в результате получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\sigma\Phi\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ -\frac{a^2}{2\sigma^2}\right) &= \bar{r}_1, \\ 2\sigma^2\left(a^2-\frac{\pi}{2}\sigma^2\Phi^2\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ -\frac{a^2}{2\sigma^2}\right)\right) &= D_r. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Введя обозначения $z=\frac{a^2}{2\sigma^2}$ и $F(z)=\Phi\left(-\frac{1}{2};\ 1;\ z\right)$, система (10) примет вид:

$$\left.\begin{aligned} \sigma F(z) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\bar{r}_1, \\ \sigma^2\left(2+2z-\frac{\pi}{2}F^2(z)\right) &= D_r. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Исключая σ, для определения z получим трансцендентное уравнение:

$$\Psi(z)=\frac{2+2z-\frac{\pi}{2}F^2(z)}{F^2(z)}=\frac{\pi D_r}{2\bar{r}_1^2}. \qquad (12)$$

Решая уравнение (12), определим значение z; затем по первому из уравнений (11) находим

$$\sigma=\frac{\bar{r}_1}{F(z)}\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \qquad (13)$$

далее—

$$a=\sigma\sqrt{2z}. \qquad (14)$$

Для облегчения вычислений составлена таблица функций $F(z)$ и $\Psi(z)$ (табл. 1). С этой целью функция $F(z)$ была разложена в ряд [3]:

$$F(z)=1+\frac{z}{2}+\sum_{m=2}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(2m-3)!!}{2^m(m!)^2}z^m. \qquad (15)$$

Вычисления произведены на ЭВМ „Наири", при этом в ряду (15) сохранено 11 членов, что обеспечивает для значений функций $F(z)$ и $\Psi(z)$ точность в 10^{-4}.

Таблица 1

z	$F(z)$	$\Psi(z)$	z	$F(z)$	$\Psi(z)$	z	$F(z)$	$\Psi(z)$
0,0	1,0000	0,4292	1,0	1,4465	0,3409	2,0	1,8131	0,2544
0,1	1,0494	0,4270	1,1	1,4562	0,3307	2,1	1,8465	0,2476
0,2	1,0976	0,4214	1,2	1,5251	0,3209	2,2	1,8794	0,2410
0,3	1,1446	0,4136	1,3	1,5633	0,3113	2,3	1,9119	0,2348
0,4	1,1906	0,4044	1,4	1,6008	0,3021	2,4	1,9439	0,2289
0,5	1,2356	0,3943	1,5	1,6377	0,2933	2,5	1,9754	0,2230
0,6	1,2795	0,3838	1,6	1,6740	0,2849	2,6	2,0065	0,2175
0,7	1,3225	0,3728	1,7	1,7098	0,2767	2,7	2,0372	0,2123
0,8	1,3647	0,3621	1,8	1,7445	0,2690	2,8	2,0674	0,2072
0,9	1,4060	0,3514	1,9	1,7791	0,2615	2,9	2,0973	0,2021
						3,0	2,1268	0,1974

Заметим, что при очень больших систематических ошибках, когда a [illegible], и больших значениях r будем иметь $\frac{ar}{\sigma^2} \gg 1$, тогда для функции $I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right)$ справедливо асимптотическое разложение [3]:

$$I_0\left(\frac{ar}{\sigma^2}\right) \approx \frac{e^{\frac{ar}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\frac{ar}{\sigma^2}}}. \qquad (16)$$

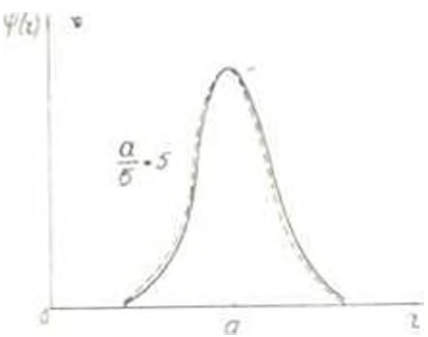

Рис. 1. Графики функций распределения по обобщенному закону Рэлея, по нормальному закону Гаусса.

Подставляя (16) в (7), получим

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{r}{a}}\, e^{-\frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (17)$$

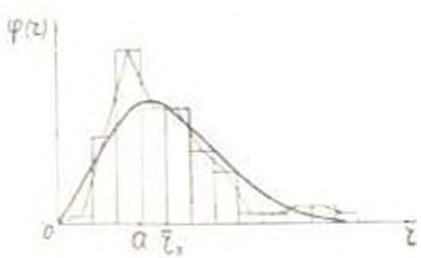

Рис. 2.

откуда видно, что при значениях r, близких к a (когда $\sqrt{\frac{r}{a}} \approx 1$), функция $\varphi(r)$ переходит в функцию плотности нормального закона распределения Гаусса:

$$\varphi(r) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(r-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (18)$$

Это означает, что при больших значениях систематической погрешности (параметра a) обобщенный закон распределения Рэлея вблизи него

тра распределения близок к нормальному закону распределения Гаусса (рис. 1).

Пример. В табл. 2 (столбцы 1—3) приводится распределение биений партии валов, обработанных на токарном станке. Вычисления дают: $\bar{r}_1 = 0{,}0453$; $D_r = 0{,}000480$; $\frac{D_r}{2\bar{r}_1} = 0{,}367$. Согласно (12) по табл. 1

Таблица 2

Интервалы	Середина интервалов r_i	Эмпирические частоты m_i		$\varphi(r)$ по формуле (18)	Теоретические частоты m_i'		$\frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'}$
0,005÷0,015	0,01	1	13	6,41	5,96	17,22	5,03
0,015÷0,025	0,02	12		12,11	11,26		
0,025÷0,035	0,03	24		15,92	14,80		5,73
0,035÷0,045	0,04	16		17,38	16,21		0,03
0,045÷0,055	0,05	16		16,17	15,09		0,05
0,055÷0,065	0,06	10		12,82	11,92		0,31
0,065÷0,075	0,07	7		8,82	8,19		0,17
0,075÷0,085	0,08	1		5,23	4,84		
0,085÷0,095	0,09	1		2,56	2,42		
0,095÷0,105	0,10	2	7	1,18	1,11	8,93	0,42
0,105÷0,115	0,11	2		0,45	0,42		
0,115÷0,025	0,12	1		0,15	0,14		
Сумма		93			92,35		7,74

интерполяцией получаем, что при $\Psi(z) = 0{,}367$ $z = 0{,}76$ и $I_1(z) = 1{,}348$. Тогда по формуле (13) $\alpha = 0{,}0268$, а по формуле (14) для систематической погрешности получим $\alpha = 0{,}0330$. Таким образом, функция плотности для рассмотренного примера будет иметь вид:

$$\varphi(r) = \frac{r}{0{,}00072}\, e^{-\frac{r^2+0{,}0033}{0{,}00144}}\, I_0(45{,}9\, r).$$

Теоретическая и эмпирическая кривые распределения приведены на рис. 2. Сравнение эмпирического и теоретического распределений по критерию согласия Пирсона [1] дает:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(m_i - m_i')^2}{m_i'} = 7{,}74.$$

Число степеней свободы $k = n - r - 1 = 4$ (n — число интервалов объединения частот, встречаемость которых меньше 5; r — число параметров теоретической функции распределения). При $\chi^2 = 7{,}74$ и $k = 4$ $P(\chi^2) = 0{,}103$ [1], что больше принятого уровня значимости 0,05. Следовательно, эмпирическая и теоретическая функции согласуются.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 2.III.1971.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методика статистической обработки эмпирических данных, РТМ44—62. Изд. Комитета стандартов, мер и измерительных приборов при Совете Министров СССР, М., 1966.
2. *Николаенко Н. А.* Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкций, изд. „Машиностроение", М., 1967.
3. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

Г. М. АСРИЯН

КОЛЕБАНИЯ ВАЛА С РАСПРЕДЕЛЕННОЙ МАССОЙ В КРУГОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С УЧЕТОМ СВЯЗИ С ДВИГАТЕЛЕМ И РАССЕЯНИЯ ЭНЕРГИИ В МАТЕРИАЛЕ

Рассмотрим сердечник с распределенными по длине массовыми, упругими и магнитными параметрами.

Выражения для компонентов сил магнитного притяжения согласно [1] будут:

$$P_1 = P_x; \quad P_2 = P_y;$$

$$P = \frac{kB^2}{4\pi}\,\frac{дин}{см^2} = \frac{\pi d_1}{\delta}\left(\frac{B}{5000}\right)^2\frac{кг}{см^2}. \qquad (1)$$

Для простоты в (1) принято, что распределение магнитной индукции не зависит от продольной координаты S, а также от φ, т. е. $B(s, \varphi) = B = \text{const}$.

Исследуем колебания вращающегося сердечника с погонной массой m, насаженного в середине прямого вала, изгибная жесткость которого EI. Дисбаланс массы сердечника относительно точки прикрепления сердечника к валу характеризуется эксцентриситетом e. Будем предполагать, что точка приложения равнодействующей магнитных сил и центр тяжести сердечника совпадают. Упругое и гистерезисное отклонения от закона Гука при изгибных колебаниях будем учитывать согласно [2]. Дифференциальные уравнения поперечных колебаний круглого сердечника с вертикально расположенным валом в магнитном поле запишутся в виде:

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[EI\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right] + m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - P_x - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[EJ(k + i\beta^2)\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2\right] = eq\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[EI\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right] + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - P_y - \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[EJ(k - i\beta^2)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2\right] = eq\sin\varphi,$$