

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Д. О. МЕЛКУМЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО
 УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ПРОИЗВОДНОЙ АРГУМЕНТА

1. **Постановка задачи.** Из геометрической интерпретации принципа аргумента (рис. 1, а) очевидно, что равномерное изменение частоты вдоль мнимой оси приводит к неравномерному изменению аргумента. В бесконечном интервале частоты скорость изменения аргумента (производная аргумента) растет от нуля до некоторого значения и снова падает до нуля. При этом экстремальное значение производной аргумента обратно пропорционально действительной части корня характеристического полинома (рис. 1, б), а величина частоты, при которой производная аргумента достигает экстремального значения, равна мнимой части корня (рис. 1, в). Эти положения и лежат в основе метода производной аргумента.

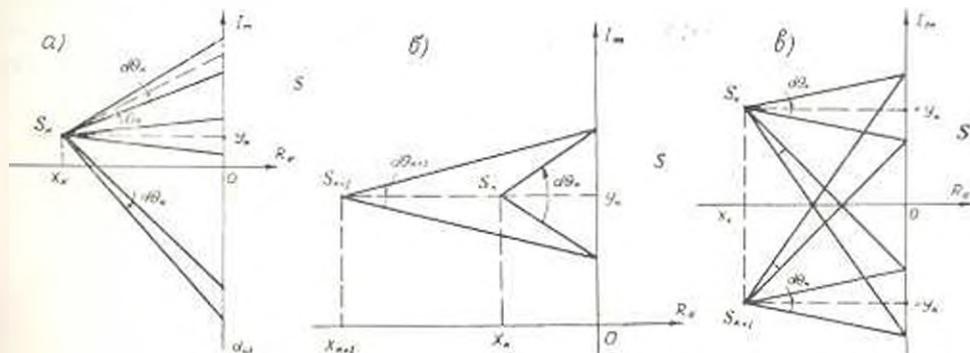


Рис. 1.

2. **Свойства производной аргумента.** Рассмотрим характеристический полином системы регулирования

$$D(s) = \sum_{k=1}^n a_k s^{n-k} = a_n \prod_{k=1}^n (s - s_k), \quad (1)$$

где a_k — действительные числа, s_k — корни полинома. Положим в (1) $s = j\omega$,

$$D(j\omega) = a_0 \prod_{k=1}^n (j\omega - s_k) = u(\omega) + jv(\omega), \quad (2)$$

тогда

$$\arg D(j\omega) = \sum_{k=1}^n \arg (j\omega - s_k) = \arctg \frac{v(\omega)}{u(\omega)}. \quad (3)$$

Пусть

$$\theta_k = \arg (j\omega - s_k) \quad \text{и} \quad \theta = \arg D(j\omega).$$

Тогда из (3) получим:

$$\theta = \sum_{k=1}^n \theta_k = \arctg \frac{v(\omega)}{u(\omega)}. \quad (4)$$

Следовательно

$$\theta' = \sum_{k=1}^n \theta_k' = \frac{uv' - vu'}{u^2 + v^2} \quad (5)$$

(если θ_k существуют), где производная взята относительно частоты.

Из рис. 1, а следует, что

$$\theta_k = \arctg \frac{\omega - y_k}{-x_k}, \quad (6)$$

откуда

$$\theta_k' = \frac{d\theta_k}{d\omega} = \frac{-x_k}{x_k^2 + (\omega - y_k)^2}. \quad (7)$$

Необходимо заметить, что при $x_k = 0$ функция (6) неопределена и, значит, не имеет производной (7). Поэтому формулы (5) и (7) справедливы только в случаях, когда $x_k \neq 0$, т. е. при отсутствии чисто мнимых корней.

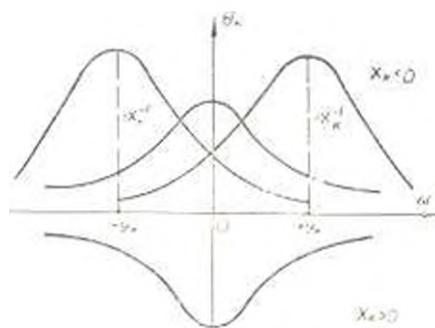


Рис. 2.

В наиболее характерных случаях графики зависимости (7) приведены на рис. 2, откуда нетрудно установить следующие свойства компонент производной аргумента. Если все корни многочлена расположены в левой полуплоскости ($x_k < 0$), то в бесконечном интервале частоты:

А. Функции $\psi_k(\omega)$ положительно-определенные:

В. $\max \psi_k(\omega) = -\frac{1}{x_k}$ при $\omega = y_k$;

С. При неограниченном приближении корня к мнимой оси экстремальное значение функции $\psi_k(\omega)$ безгранично возрастает;

Д. $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \psi_k(\omega) = 0$;

Е. Площадь, расположенная между кривой $\psi_k(\omega)$ и осью абсцисс, равна π , т. е.

$$\int_0^{\infty} \psi_k(\omega) d\omega = \pi.$$

Свойства А, В, С, Д очевидны из выражения (7), а свойство Е следует из принципа аргумента [1] или можно получить непосредственным интегрированием соотношения (7). Для свойств А и Е легко показать и обратное. Если $\psi_k(\omega)$ положительно-определенная функция или удовлетворяет условию Е, то соответствующий корень расположен в левой полуплоскости. Это непосредственно следует из формулы (7).

Некоторые аналогичные свойства можно получить для производной аргумента. Из формулы (5) на основании свойств А, С, Д, Е следует (при $x_k < 0$):

Г. Функция $\psi'_k(\omega)$ положительно-определенная и четная;

С. При неограниченном приближении корней к мнимой оси наибольшее значение функции $\psi'_k(\omega)$ безгранично возрастает;

Н. $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \psi'_k(\omega) = 0$;

К. Площадь, расположенная между годографом производной аргумента и осью частот, равна $n\pi$, т. е.

$$\int_0^{\infty} \psi'_k(\omega) d\omega = n\pi.$$

Обратное, вообще говоря, имеет место только в случае К, на основе которого установлен новый критерий устойчивости.

3. Критерий устойчивости. Докажем справедливость следующего утверждения: *если площадь, расположенная между годографом производной аргумента (5) и абсциссой равна $n\pi$, то система устойчива.* Действительно, из принципа аргумента следует, что

$$\int_0^{\infty} |\psi'_k(\omega)| d\omega = n\pi. \quad (8)$$

Из формулы (5) имеем

$$n\pi = \int_{-\infty}^{\infty} \theta'(\omega) d\omega = \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \theta_k'(\omega) d\omega \leq \sum_{k=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} |\theta_k'(\omega)| d\omega = n\pi.$$

Следовательно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_k'(\omega) d\omega = \pi, \quad \text{т. е. } x_k < 0.$$

Таким образом, необходимое и достаточное условие устойчивости системы имеет следующий вид:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta'(\omega) d\omega = n\pi, \quad (9)$$

где n — степень характеристического полинома.

Так как $\theta'(\omega)$ является четкой функцией от частоты, то условие (9) можно привести к более простому виду:

$$\int_0^{\infty} \theta'(\omega) d\omega = \frac{n\pi}{2}. \quad (10)$$

Соотношение (10) можно использовать и качестве как аналитического, так и графического критерия. Однако применение (10) в качестве аналитического критерия нецелесообразно, так как интегрирование функции (5) для больших n представляет трудоемкую задачу. Поэтому его лучше использовать в качестве графического критерия. Хотя и построение годографа производной аргумента не дает преимуществ относительно годографа Михайлова в качестве графического критерия, однако при помощи наибольшего значения производной аргумента представляется возможность оценить параметры качества переходного процесса. Заметим, что при нарушении условия (10) система будет либо нейтральна, либо неустойчива. При этом если $\theta'(\omega)$ знакопеременна в бесконечном интервале частоты, то система неустойчива [существует отрицательное слагаемое в сумме (5)]. В противном случае корни многочлена (1) необходимо сдвинуть вправо на величину $\varepsilon = \frac{1}{n \sup \theta'(\omega)}$. Если для полученного многочлена $\theta'(\omega)$ знакпостоянна, то система неустойчива, в противном случае — нейтральна.

4. *Оценки показателей качества переходного процесса.* Докажем, что степень устойчивости линейных систем не меньше обратной величины наибольшего значения производной аргумента, т. е.

$$\delta \geq \frac{1}{\sup \theta'(\omega)}. \quad (11)$$

Действительно, для устойчивых систем b' и θ_k являются положительно определенными функциями, поэтому

$$\sup b'(\omega) = \sup \sum_{k=1}^n \theta_k(\omega) > \sup \theta_k'(\omega), \quad (12)$$

На основании свойства В имеем:

$$\sup \theta_k'(\omega) = \frac{1}{x_k}, \quad (13)$$

где x_k — действительная часть корня характеристического полинома. Из (12) и (13) следует:

$$x_k > \frac{1}{\sup b'(\omega)}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (14)$$

что доказывает справедливость соотношения (11).

В частном случае, когда ближайший к мнимой оси корень действительный, имеем

$$\sup b'(\omega) = b'(0) = \frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad (15)$$

Последнее совпадает с результатом, полученным с помощью формул Виета [2]. Таким образом, для косвенных параметров качества можно указать следующие границы:

$$\frac{1}{\sup b'(\omega)} \leq \delta \leq \min_k \left| \frac{a_k}{a_0 C_n^k} \right|^{\frac{1}{k}}; \quad (16)$$

$$\frac{1}{\sup b'(\omega) \cdot \max_k \left(\frac{a_k}{a_{k-1}} \right)} < \mu \leq \frac{\min_k \left| \frac{a_k}{a_0 C_n^k} \right|^{\frac{1}{k}}}{\min_k \left(\frac{a_k}{a_{k-1}} \right)}, \quad (17)$$

где $\mu = \min_k (\cos \varphi_k)$ называется *степенью колебательности*. Так как не установлена прямая связь между косвенным и прямым показателями качества переходного процесса [3], то оценки лишь косвенных показателей не могут гарантировать желаемый переходный процесс. Быстрота процесса зависит не только от косвенных параметров качества, но и от начальных условий и кратности корней характеристического полинома. На практике начальные условия настолько разнообразны, что в каждом конкретном случае их влияние на переходный процесс необходимо рассматривать отдельно.

Влияние кратности корней на быстродействие САР может быть установлено с помощью наибольшего значения производной аргумента в наиболее важном случае начальных условий

$$y(0) = 1, \quad y^{(k)}(0) = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad (18)$$

где μ — выходящая величина системы. Анализ показывает, что время регулирования системы увеличивается не больше, чем в m раз, когда ближайший к мнимой оси корень имеет кратность m . Поскольку в этом случае наибольшее значение производной аргумента увеличивается точно в m раз, то время регулирования системы меньше наибольшего значения производной аргумента, т. е.

$$t_p \leq \sup \theta'(\omega), \quad i = 3 \dots 5. \quad (19)$$

Таким образом, построение годографа производной аргумента дает возможность не только судить об устойчивости систем, но и производить оценку показателей качества переходного процесса.

5. Численный метод определения корней полинома. Без ограничения общности можно полагать, что система устойчива, так как для всех полиномов вида (1) можно обеспечить условие устойчивости при помощи подстановки

$$s = z - R,$$

где R — радиус круга, внутри которого расположены все корни многочлена [4].

Сущность метода заключается в том, что последовательно сдвигаются корни многочлена в сторону мнимой оси до тех пор, пока наибольшее значение производной аргумента не стремится к бесконечности. По сумме шагов сдвига определяется действительная часть корня, а значение частоты, при которой производная аргумента претерпевает разрыв, определяет мнимую часть корня. В качестве шага сдвига выбирается обратная величина наибольшего значения производной аргумента.

Докажем сходимость метода. Пусть по такому алгоритму построена последовательность шагов $\{\delta_k\}$. Члены последовательности положительны, так как после каждого сдвига в силу условия (11) система остается устойчивой. С другой стороны, $\{\delta_k\}$ является монотонно убывающей последовательностью, так как после каждого сдвига увеличивается наибольшее значение производной аргумента. Следовательно, по признаку сходимости Даламбера ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k$ сходится. При этом

$$\delta_i = \sum_{k=1}^i \delta_k = \min_k |x_k|. \quad (20)$$

Далее выделяется найденный корень многочлена и описанная процедура повторяется для определения остальных корней. Так как для рассматриваемых полиномов справедливо неравенство [4]:

$$y_k \leq |s_k| \leq \max_k \left(\frac{a_k}{a_{k-1}} \right), \quad (21)$$

то поиск наибольшего значения производной аргумента достаточно производить лишь в конечном интервале частоты

$$0 \leq \omega \leq \max_k \left(\frac{a_k}{a_{k-1}} \right). \quad (22)$$

Это существенно упрощает задачу поиска. Метод хорошо реализуется на ЦВМ, благодаря использованию схемы Горнера.

ЕрНИИММ

Поступило 23.III.1970.

Չ. 2. ՄԱՔՈՒՄՅԱՆ

ԱՎՏՈՄԱՏ ԿՈՌԱՎԱՐՄԱՆ ՈՒՍՏԵՄՆԵՐԻ ՀԵՏԱԶՈՏՈՒՄԸ ԱՐԳՈՒՄԵՆՏԻ ԱՇՁԱՅՅԱԿԻ ՄԵԹՈՒՌԻԸ

Ա մ փ ն փ ու մ

Ավտոմատ կոռուկտիվային սխեմաների հետազոտման համար առաջարկվում է նոր մեթոդ, որի հիմքում ընկած են այդ սխեմաների բնութագրիչ բաղմանդամի արդումենտի ածանցյալի մի շարք հետադարձիչ հատկություններ: Յույց է արքված, որ բնութագրիչ բաղմանդամի արդումենտի ածանցյալը ու բաղադրիչների դամար է, որոնք միարժեքորեն որոշվում են բաղմանդամի համապատասխան արմատներով: Առաջադրվում է կանոնավորման սխեմաների կայունության որոշման նոր չափանիշ՝ առանց զանկու բնութագրիչ բաղմանդամի արմատները նոր չափանիշը հնարավորություն է ապահովել ոչ միայն կանոնավորման սխեմաների կայունությունը, այլև քանակապես գնահատել սխեմաների որակը: Բերված են մի քանի գնահատականներ անցողիկ պրոցեսների որակի պարամետրների համար, որոնք ստացված են բնութագրիչ բաղմանդամի արդումենտի ածանցյալի մեծագույն արժեքի հիման վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Изд. „Наука“, М., 1969.
2. Мелкумян А. О. О критических показателях качества переходного процесса. „Известия АН Арм. ССР (серия Т. Н)“, т. XXI, № 6, 1968.
3. Фельдбаум А. А. Замкнутые системы автоматического регулирования. Оборонгиз, М., 1957.
4. Поля Г. и Сеге Л. Задачи и теоремы из анализа. Ч. I. Гостехиздат, М., 1956.