

А. М. МУРАДЯН

НЕЛИНЕЙНАЯ ПОЛЗУЧЕСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЫ ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ

В статье рассматриваются напряжения в бесконечной цилиндрической трубе, подвергающейся охлаждению через боковые поверхности. При определении напряжений учитываются свойства нелинейной ползучести материала трубы и изменения во времени модуля упругости деформации.

1. Цилиндрическая труба, имеющая начальную температуру T_0 , подвергается охлаждению через боковые поверхности. Температуру среды принимаем постоянной. Решение уравнения теплопроводности при граничных условиях третьего рода имеет следующий вид [1]:

$$T(r, t) = T_1 + (T_0 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} H_n(r) e^{-\lambda_n^2 t}; \quad (1)$$

$$H_n(r) = 2h_1(T_0 - T_1) \frac{J_0^*(u_n r)}{r_0^2} \frac{J^*(u_n, h_1, a) - J_0^*(u_n r) Y^*(u_n, h_1, a)}{\varepsilon_n^2 (a^2 - b^2) - a^2 - b^2},$$

Здесь u_n — корни уравнения

$$J^*(u_n, -h_1, b) Y^*(u_n, h_1, a) - J^*(u_n, h_1, a) Y^*(u_n, -h_1, b) = 0;$$

$$\varepsilon_n = \frac{J^*(u_n, h_1, a)}{J^*(u_n, -h_1, b)};$$

b, a — соответственно внешний и внутренний радиусы цилиндра.

2. Из условия несжимаемости материала трубы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = 3\alpha T(r, t).$$

Интегрируя это уравнение, получим

$$u = \frac{1}{2} \frac{b^2}{r^2} \eta(t) + \frac{3\alpha}{r} \int_0^r T(r, t) r dr;$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= -\frac{1}{2} \frac{b^2}{r^2} \dot{\varepsilon}(t) - 3\dot{\varepsilon}_z T(r, t) - \frac{3\dot{\varepsilon}_z}{r^2} \int_0^r T(r, t) r dr, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2} \frac{b^2}{r^2} \dot{\varepsilon}(t) - \frac{3\dot{\varepsilon}_z}{r^2} \int_0^r T(r, t) r dr, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\dot{\varepsilon}(t)$ — некоторая функция.

Между деформациями и напряжениями при учете нелинейной ползучести материала существуют следующие зависимости [2]:

$$\begin{aligned} [\varepsilon_r(t) - \varepsilon_0(t)] E(t) &= \varepsilon_r(t) - \varepsilon_z(t) - \int_0^t [\varepsilon_r(\tau) - \varepsilon_z(\tau)] f(\varepsilon_1) K(t, \tau) d\tau; \\ \varepsilon_r(t) \frac{E(t)}{3} &= \varepsilon_{rz}(t) - \int_0^t \varepsilon_{rz}(\tau) f(\varepsilon_1) K(t, \tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$K(t, \tau) = E(t) \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E(\tau)} \varphi(\tau) (1 - e^{-\gamma(E(\tau) - E_0)}) \right];$$

$$E(t) = E_0 (1 - e^{-\gamma t}); \quad \varphi(\tau) = C_0 + \frac{A_1}{\tau}.$$

где

E_0 — предельный модуль упругости материала;

γ, C_0, A_1 — некоторые параметры, характеризующие деформативные свойства и условия старения бетона;

τ_0 — возраст материала и момент приложения нагрузки;

$f(\varepsilon_1) = 1 + \frac{\gamma \varepsilon_1}{E_0} e^{-\gamma \varepsilon_1}$ — функция, характеризующая нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями,

где

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2}.$$

Используя уравнения равновесия

$$\sigma_r = \sigma_z + r \frac{d\sigma_r}{dr}$$

и (2), уравнение (3) можно привести к следующему виду:

$$\frac{\varepsilon_r(t) - \varepsilon_z(t)}{r} E(t) = \frac{d\varepsilon_z(t)}{dr} - \int_0^t \frac{d\varepsilon_z(\tau)}{dr} f(\varepsilon_1) K(t, \tau) d\tau. \quad (4)$$

Для решения полученного нелинейного интегро-дифференциального уравнения воспользуемся методом малого параметра. Для этого ε_r, σ_r и σ_z разложим в ряд относительно малого параметра

$$z_r = z_r^{(0)} + \beta z_r^{(1)} + \beta^2 z_r^{(2)} + \dots \quad r, z, z$$

$$f(z_i) = z + f(z_i^{(0)}) + f(z_i^{(1)}) + \dots = z + \beta \{z_i^{(0)}\}^m + \beta^2 m \{z_i^{(0)}\}^{m-1} z_i^{(1)} + \dots$$

Тогда уравнение (4) можно представить в виде бесконечной системы линейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \left. \frac{F(t)}{r} \right| - \frac{b^2}{r^2} Q_0(t) + 3\alpha T(r, t) - \frac{6\alpha}{r^2} \int_a^r T(r, t) r dr &= \\ &= \frac{d z_r^{(0)}(t)}{dr} - \int_a^t \frac{d z_r^{(0)}(\tau)}{dr} K(t, \tau) d\tau \\ &\dots \dots \dots \\ Q_{n-1}(r, t) &= \frac{d z_r^{(n)}(t)}{dr} - \int_a^t \frac{d z_r^{(n)}(\tau)}{dr} K(t, \tau) d\tau, \end{aligned}$$

где

$$Q_n(r, t) = f(z_i^{(0)}) \frac{d z_r^{(n)}}{dr} + f(z_i^{(0)-1}) + \dots + f(z_i^{(n)}) \frac{d z_r^{(n)}}{dr}.$$

Решая полученную систему уравнений и удовлетворив граничные условия

$$z_i|_{r=a} = 0; \quad z_r|_{r=b} = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} Q_0(t) &= \frac{2a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b \left[3\alpha T(r, t) - \frac{6\alpha}{r^2} \int_a^r T(r, t) r dr \right] \frac{dr}{r}; \\ z_r^{(0)} &= \int_a^t \left[E(t) \right] - \frac{b^2}{r^2} Q_0(t) + 3\alpha T(r, t) - \frac{6\alpha}{r^2} \int_a^r T(r, t) r dr &+ \\ &+ \int_a^t E(\tau) \left[-\frac{b^2}{r^2} Q_0(\tau) + 3\alpha T(r, \tau) - \frac{6\alpha}{r^2} \int_a^r T(r, \tau) r dr \right] K(t, \tau) d\tau \Big| \frac{dr}{r}; \\ &\dots \dots \dots \\ z_r^{(n)} &= \int_a^t \left[Q_{n-1}(r, t) + \int_a^t Q_{n-1}(r, \tau) K(t, \tau) d\tau \right] \frac{dr}{r}. \end{aligned}$$

Резольвента ядра $K(t, \tau)$

$$R(t, \tau) = -\gamma \tau(t) E(\tau) - \frac{E'(\tau)}{E(\tau)} +$$

$$+ \frac{\gamma(z) + \gamma(z)[\gamma(z) - \gamma]}{E(z)} \int_0^z E(\xi) e^{-\int_0^\xi \gamma(\eta) d\eta} d\xi.$$

Для определения z_1 воспользуемся следующим соотношением

$$\frac{z_1(t) - z_0(t)}{2} E(t) = \frac{z_1(t) - z_0(t)}{2} - z_2(t) - \\ - \int_0^t \left| \frac{z_1(z) - z_0(z)}{2} - z_2(z) \right| f(z) K(t, z) dz,$$

которое можно представить системой линейных интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода:

$$\frac{3}{2} z E(t) T(r, t) = \frac{z_1^{(0)}(t) - z_2^{(0)}(t)}{2} - z_2^{(0)}(t) - \\ - \int_0^t \left[\frac{z_1^{(0)}(z) - z_2^{(0)}(z)}{2} - z_2^{(0)}(z) \right] K(t, z) dz \\ \frac{z_1^{(0)}(t) + z_2^{(0)}(t)}{2} - z_2^{(0)}(t) - \int_0^t \left[\frac{z_1^{(0)}(z) - z_2^{(0)}(z)}{2} - z_2^{(0)}(z) \right] f(z) dz - \\ - z_2^{(0)}(z) \left| K(t, z) \right| dz = 0; \\ \dots \dots \dots$$

Ограничиваясь двумя первыми приближениями, напряжения можно представить в следующем виде:

$$z_0 = 3\alpha(T_0 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} A_n(r) \varphi_n^{(0)}(t, z_0) + \\ + 3\alpha^2(T_0 - T_1) \int_0^t \left\{ \frac{15}{4} (T_0 - T_1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|B_n(r)|^2}{r} \varphi_n^{(0)}(t, z_0) + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} B_n(r) \left[T_1 \varphi_n^{(0)}(t, z_0) - (T_0 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} H_n(r) \varphi_n^{(0)}(t, z_0) \right] \right\} dr; \\ z_1 = 3\alpha(T_0 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n(r) + r \frac{dA_n(r)}{dr} \right] \varphi_n^{(1)}(t, z_0) + \\ + 3\alpha^2(T_0 - T_1) r \left\{ \frac{15}{4} (T_0 - T_1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|B_n(r)|^2}{r} \varphi_n^{(0)}(t, z_0) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left[T_1 \varphi_n^{(3)}(t, \tau_0) - (T_0 - T_1) H_n(r) \varphi_n^{(3)}(t, \tau_0) \right]^2 B_n(r) \Bigg| + \\
& + 3\pi^3 (T_0 - T_1) \int_a^r \left| \frac{15}{4} (T_0 - T_1)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[B_n(r)]^2}{r} \varphi_n^{(3)}(t, \tau_0) \right| \\
& \sum_{n=1}^{\infty} \left[T_1 \varphi_n^{(3)}(t, \tau_0) - (T_0 - T_1) H_n(r) \varphi_n^{(3)}(t, \tau_0) \right] B_n(r) \Bigg| dr,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_n(r) &= H_n(r) - \frac{2}{r^2} \int_a^r H_n(r) r dr - \frac{b^2}{r^2} \int_a^b \left| H_n(r) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{2}{r^2} \int_a^r H_n(r) r dr \right| \frac{dr}{r}; \\
B_n(r) &= r \frac{dH_n(r)}{dr} - 2H_n(r) + \frac{4}{r^2} \int_a^r H_n(r) r dr + \\
& \quad + \frac{2b^2}{r^2} \int_a^b \left| H_n(r) - \frac{2}{r^2} \int_a^r H_n(r) r dr \right| \frac{dr}{r}.
\end{aligned}$$

Здесь функции влияния линейной ползучести:

$$\begin{aligned}
\varphi_n^{(1)}(t, \tau_0) &= E(t) e^{-\alpha_n^2(t-\tau_0)} + \int_{\tau_0}^t E(\tau) e^{-\alpha_n^2(t-\tau)} R(t, \tau) d\tau; \\
\varphi_n^{(2)}(t, \tau_0) &= [\varphi_n^{(1)}(t, \tau_0)]^2 + \int_{\tau_0}^t [\varphi_n^{(1)}(\tau, \tau_0)]^2 R(t, \tau) d\tau; \\
\varphi_n^{(3)}(t, \tau_0) &= [\varphi_n^{(2)}(t, \tau_0)]^2 + \int_{\tau_0}^t [\varphi_n^{(2)}(\tau, \tau_0)]^2 R(t, \tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Функция влияния нелинейной ползучести

$$\varphi_n^{(4)}(t, \tau_0) = e^{-\alpha_n^2(t-\tau_0)} [\varphi_n^{(3)}(t, \tau_0)]^2 + \int_{\tau_0}^t e^{-\alpha_n^2(t-\tau)} [\varphi_n^{(3)}(\tau, \tau_0)]^2 R(t, \tau) d\tau.$$

В силу (2) получим следующее выражение для определения продольных перемещений трубы:

$$u = \frac{b^2 a^2}{r(b^2 - a^2)} \int_0^t \left| 3\pi T(r, t) - \frac{6\pi}{r} \int_0^t T(r, t) r dr \right| \frac{dr}{r} + \frac{3\pi}{r} \int_0^t T(r, t) r dr.$$

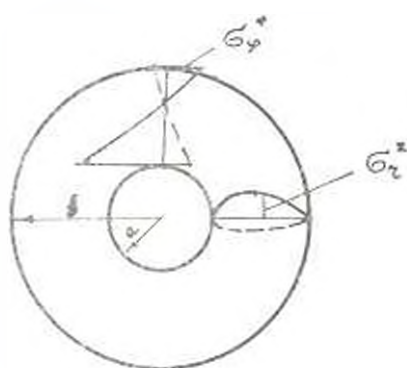
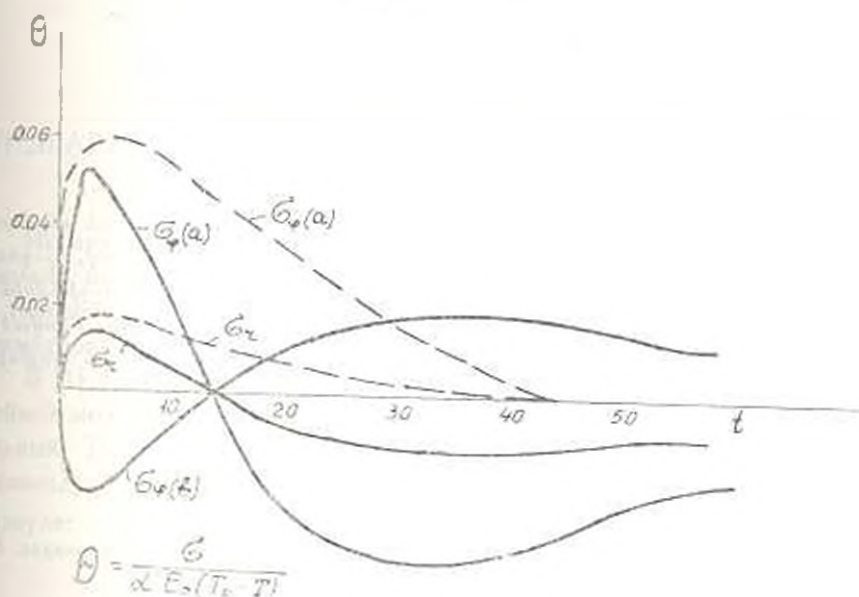


Рис. 2

Рассмотрим численный пример:

$\tau_0 = 7$ дней; $E_0 = 2 \cdot 10^4$ кГ/см²; $\gamma_1 = 0,026$ /день; $\gamma_2 = 0,03$ /день;
 $C_0 = 0,9 \times 10^{-2}$ см²/кГ; $A_1 = 4,82 \cdot 10^{-3}$ см²/кГ·день; $\beta = 0,068$ м²/день;
 $h_1 = 0,1$ м⁻¹; $h_2 = 0,2$ м⁻¹.

