

ЭНЕРГЕТИКА

Д. С. МЕЛКОНЯН, В. И. СЛАКОВ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ ПРИ РАСЧЕТАХ  
 ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ И ЧАСТОТНЫХ  
 ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Методы приближенного вычисления преобразований Фурье служат при исследовании линейных систем основой для решения следующих двух взаимно обратных задач: 1) расчет переходного процесса в системе по ее частотным характеристикам, определенным из эксперимента или расчетным путем, 2) расчет частотных характеристик по экспериментально определенной кривой переходного процесса.

Большинство существующих методов решения этих задач является графическим или графо-аналитическим, и в настоящее время актуальна задача разработки численных методов, приводящих к алгоритмам, удобным для реализации на ЭЦМ. Следует отметить, что для решения задач корреляционного анализа по тем или иным формулам дискретного преобразования Фурье созданы алгоритмы машинного вычисления преобразования Фурье [1]. Однако использование при этом принципа задания в качестве исходной информации дискретных значений преобразуемой функции в равноотстоящих точках (здесь арифметической прогрессии) является неэффективным при обработке частотных и временных характеристик линейных систем, так как приводит к избыточности задания неоправданно большого объема исходной информации для расчетов.

В настоящей работе предлагается метод численного преобразования Фурье, позволяющий эффективно обрабатывать частотные и временные характеристики, благодаря своему принципу выборки: в качестве исходной информации служат дискретные значения преобразуемой функции, заданные в точках, составляющих возрастающую геометрическую прогрессию.

Приближенное вычисление преобразований Фурье выполняется в два основных этапа: 1) аппроксимация исходной функции аналитическим выражением, 2) выделение косинус- и синус-преобразований Фурье от аппроксимирующей функции.

**Метод аппроксимации.** Для решения первого этапа разработан численный метод, позволяющий аппроксимировать исходную функцию  $f(x)$ , заданную на отрезке от 0 до  $L$ , функцией  $Q(x)$  согласно условию:

$$f(x_i) = Q(x_i), \quad (1)$$

где  $x_i = L^i c^i$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) — узловые точки, составляющие геометрическую прогрессию со знаменателем  $c > 1$ .

В качестве  $Q(x)$  предлагается ряд

$$Q(x) = \sum_{k=0}^N Q_k \psi(2^k x^N) \sin(2^k x^N), \quad (2)$$

где  $Q_k$  — коэффициенты ряда;  $\psi(x)$  — непрерывная функция от  $x$ ,

$$\psi = 2^{k-1} \frac{\pi}{L^N}, \quad N = \frac{\log 2}{\log c},$$

представляющий обобщение ряда, рассмотренного в [2]. Аргументы синусовид, входящих в ряд (2), содержат множители  $1, 2, 4, \dots, 2^k, \dots$ , возрастающие как члены геометрической прогрессии со знаменателем, равным 2. Благодаря этому, в узловых точках  $x_i$ , также образующих геометрическую прогрессию, обращаются в нуль те члены ряда, для которых  $k > i$ . Процесс определения коэффициентов ряда, использующий это свойство, сводится к следующему.

При  $x = L$   $Q(L) = Q_0 \psi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ . Следовательно, с учетом (1)

$$Q_0 = \frac{f(L)}{\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)}. \quad (3a)$$

В общем случае

$$Q\left(\frac{L}{c^i}\right) = \sum_{k=0}^{i-1} Q_k \psi(2^{k-i+1}\pi) \sin(2^{k-i+1}\pi).$$

Следовательно, с учетом (1)

$$Q_i = \frac{1}{\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)} \left[ f\left(\frac{L}{c^i}\right) - \sum_{k=0}^{i-1} Q_k \psi(2^{k-i+1}\pi) \sin(2^{k-i+1}\pi) \right]. \quad (3b)$$

Формулы (3) позволяют определять коэффициенты  $Q_i$  в порядке возрастания индекса  $i$ . Чтобы можно было определять  $Q_i$  в произвольной последовательности, формулы (3) преобразовываются к виду:

$$Q_i = \sum_{j=0}^i \xi_j f\left(\frac{L}{c^{i-j}}\right), \quad (4)$$

где

$$\xi_0 = \frac{1}{\psi\left(\frac{\pi}{2}\right)}, \quad \xi_j = -\xi_0 \sum_{k=0}^{j-1} \xi_k \psi(2^{k-j+1}\pi) \sin(2^{k-j+1}\pi), \quad (5)$$

Коэффициенты  $\xi_j$  не зависят от вида аппроксимируемой функции, а также от показателя степени  $N$  и при заданной  $\psi(x)$  могут быть табулированы.

Оставив в выражении (2)  $n + 1$  первых членов, получаем усеченный ряд

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n Q_k \psi(v_k x^N) \sin(v_k x^N). \quad (6)$$

Если коэффициенты  $Q_k$  определяются по формулам (3) или (4), то  $Q_n(x_i) = f(x_i)$  при  $i = 0, \dots, n$ .

Благодаря этому свойству, для конкретных задач аппроксимации используется функция  $Q_n(x)$ , важным свойством которой является то, что добавление новых членов с коэффициентами  $Q_{n+1}, \dots$  не требует изменения значения уже вычисленных коэффициентов  $Q_0, \dots, Q_n$ .

Функция  $Q_n(x)$  точно совпадает с  $f(x)$  в узловых точках. Однако необходимо добиться совпадения этих функций и в промежутках между узловыми точками. Для этого выберем такой показатель прогрессии, чтобы  $f(x)$  изменялась между узловыми точками по плавным кривым, и потребуем того же от функции  $Q_n(x)$ . Характер изменения  $Q_n(x)$  между узловыми точками во многом определяется видом функции  $\psi(x)$ , в зависимости от которой из общей формулы (6) получают различные аппроксимирующие выражения. В работе исследован ряд

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^n Q_k \exp(v_k a x^N) \sin(v_k x^N) \quad (7)$$

$[\psi(x) = \exp(ax)]$  при разных значениях параметра  $a$ . При  $a = 0$   $Q_n(x)$  состоит из синусов; при этом  $k$ -ый член ряда имеет между узловыми точками  $x_{i-1}$  и  $x_i 2^{k-1}$  экстремумов. При положительном  $a$  синусоиды разных частот, входящие в (7), экспоненциально нарастая, обуславливают колебательный характер изменения  $Q_n(x)$  между узловыми точками. Напротив, при отрицательных  $a$  синусоиды разных частот, из которых состоит ряд (7), с возрастанием  $x$  экспоненциально затухают. Благодаря этому, характер изменения функции  $Q_n(x)$  между узловыми точками  $x_{i-1}$  и  $x_i$  обуславливается главным образом членами ряда с порядковыми номерами  $k \leq i$ , которые при  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$  экстремумов не имеют, а колебания, создаваемые членами ряда с индексами  $k > i$ , оказываются сглаженными. В соответствии с этим установлено, что параметр  $a$  целесообразно выбирать в пределах  $-1,1 \leq a \leq -0,6$ . Например, при  $a = -1$   $Q_n(x)$  обеспечивает весьма плавное соединение узловых точек  $x_0, x_1$  и т. д., а между точками  $x_0, \dots, x_3$  имеет небольшие колебания, затухающие по мере удаления от  $L$ . Это явление, аналогичное описанному в [2], может быть устранено, если рядом  $Q_n(x)$  аппроксимировать непосредственно не  $f(x)$ , а вычисленную по ней функцию

$$h(x) = f(x) - bf(L) \exp\left(-\frac{\pi x^N}{4L}\right) \sin\left(\frac{\pi x^N}{4L}\right),$$

где

$$b = 1/\exp\left(-\frac{\pi}{4}\right) \sin \frac{\pi}{4}.$$

В этом случае выражение, аппроксимирующее  $f(x)$  согласно условию (1), приобретает следующий вид:

$$S_n(x) = \sum_{k=-1}^n S_k \exp(-\varphi_k x^N) \sin(\varphi_k x^N) = \sum_{k=-1}^n S_k \varphi_k(x), \quad (8)$$

где

$$S_{-1} = bf(L); \quad S_0 = 0; \quad S_k = \sum_{j=1}^{k+1} \xi_j h\left(\frac{L}{x^{2j-1}}\right). \quad (9)$$

Значения коэффициентов  $\xi_j$ , входящих в эти формулы, совпадают со значениями аналогичных табулированных коэффициентов [2]. Функция  $S_n(x)$  представляет гладкую кривую, совпадающую с аппроксимируемой функцией в узловых точках.

**Формулы численного преобразования Фурье.** Принцип приближенного вычисления косинус- $F_c(x)$  и синус- $F_s(x)$  преобразований Фурье от функции  $f(x)$  заключается в следующем. Выбирается отрезок  $L$  таким образом, чтобы  $f(L)$  можно было считать практически равным установившемуся значению:  $f(x) \approx f(L)$  при  $x \geq L$ . Тогда

$$F_c(x) = \int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx \approx \int_0^L f(x) \cos \alpha x dx - \frac{f(L)}{\alpha} \cos \alpha L, \quad (10)$$

$$F_s(x) = \int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx \approx \int_0^L f(x) \sin \alpha x dx + \frac{f(L)}{\alpha} \sin \alpha L.$$

Для вычисления интегралов  $f(x)$  заменяется на отрезке от 0 до  $L$  функцией  $S_n(x)$ . Интегралы  $S_n \int_0^L \varphi_k(x) \cos \alpha x dx$  и  $S_n \int_0^L \varphi_k(x) \sin \alpha x dx$  вычисляются по известным формулам [3] путем замены  $\varphi_k(x)$  на каждом из промежутков  $[x_{i-1}, x_i]$ , где  $x_i = ih_k = i \frac{L}{p_k}$  ( $i = 0, 1, \dots, p_k$ ), отрезком прямой, соединяющей ординаты  $\varphi_k(x_{i-1})$  и  $\varphi_k(x_i)$ . В результате формулы (10) примут вид:

$$F_c(x) \approx \sum_{k=-1}^n 2S_k \frac{1 - \cos \alpha h_k}{\alpha^2 h_k} \sum_{i=1}^{p_k-1} \varphi_k(ih_k) \cos(\alpha ih_k) + \\ + \sum_{k=-1}^n S_k \varphi_k(L) \left| \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{\sin \alpha h_k}{\alpha h_k} \right) \sin \alpha L + \frac{1 - \cos \alpha h_k}{\alpha^2 h_k} \cos \alpha L \right| - \\ - \frac{f(L)}{\alpha} \sin \alpha L, \quad (11)$$

$$F_1(x) \approx \sum_{k=1}^n 2S_k \frac{1 - \cos 2 h_k x}{x^2 h_k} \sum_{l=1}^{p_k-1} \tau_k(ih_k) \sin(2 ih_k x) +$$

$$\sum_{k=1}^n S_k \tau_k(L) \left[ \frac{1 - \cos 2 h_k L}{x h_k} \sin 2 L - \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{\sin 2 h_k L}{2 h_k} \right) \cos 2 L \right] +$$

$$+ \frac{f(L)}{x} \cos 2 L.$$

При расчетах по этим формулам значение  $p_k$  выбирается таким образом, чтобы кусочно-ломаная кривая служила близким приближением к  $\tau_k(x)$ . Исходя из того, что поведение функции  $\tau_k(x)$  на отрезке между точками  $(i-1)h_k$  и  $ih_k$  повторяет поведение функции  $\tau_k(x)$  на отрезке между точками  $(i-1)h_1$  и  $ih_1$ , значение  $p_k$  определяется как

$$p_k = \text{целая часть } [(p_1 / 2^{k-1}) - 1], \quad (12)$$

На практике при обработке частотных характеристик и кривых переходных процессов часто встречаются функции, которые при  $t \rightarrow \infty$  стремятся к нулю. При аппроксимации этих функций отрезок  $L$  выбирается таким образом, чтобы в его пределах  $f(x)$  достигала практически нулевого значения. При  $x \gg L$  как  $f(x)$ , так и  $S_n(x)$  практически равны нулю. Следовательно, можно принять, что  $f(x)$  и  $S_n(x)$  совпадают не только при  $0 < x \leq L$ , но и при  $x \gg L$ . В этом случае формулы численного преобразования Фурье существенно упрощаются:

$$F_1(x) \approx \sum_{k=1}^n 2S_k \frac{1 - \cos 2 h_k x}{x^2 h_k} \sum_{l=1}^{p_k-1} \tau_k(ih_k) \cos(2 ih_k x), \quad (13)$$

$$f_1(x) \approx \sum_{k=1}^n 2S_k \frac{1 - \cos 2 h_k L}{x^2 h_k} \sum_{l=1}^{p_k-1} \tau_k(ih_k) \sin(2 ih_k x).$$

В качестве исходной информации для расчетов по формулам (11), (12) и (13) служат значения коэффициентов  $S_k$ , а также значения нескольких постоянных —  $L$ ,  $f(L)$ ,  $\epsilon$  и т. д. Сочетание этих формул с формулами (9), служащими для определения коэффициентов  $S_k$ , дает алгоритмы расчетов, в которых в качестве исходной информации задаются значения преобразуемой функции в узловых точках и определяются приближенные значения ее косинус- и синус-преобразований (Фурье для заданных дискретных значений  $x$ ). По этим алгоритмам составлены программы расчетов для ЭЦВМ типа „Наври“.

**Расчет переходного процесса.** Пусть на вход линейной системы с амплитудно-фазовой характеристикой  $P(j\omega)$  подается возмущение  $x(t)$ . Тогда выходная функция системы  $y(t)$  (или ее переходный процесс) определяется одним из выражений

$$y(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Y_s(\omega) \sin \omega t d\omega = -[\omega Y_s(\omega)]_{\omega=0} + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Y_c(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (14)$$

где  $Y_c(\omega)$  и  $Y_s(\omega)$  соответственно представляют действительную и мнимую компоненты комплексного спектра выходной функции  $Y(j\omega) = P(j\omega)X(j\omega)$ . Эти выражения являются основой для расчета переходного процесса частотным методом.

Использование разработанных формул численного преобразования Фурье для вычисления интегралов, входящих в (14), позволяет приближенно рассчитать переходный процесс по одной из функций  $Y_c(\omega)$  или  $Y_s(\omega)$ . При этом существенным достоинством разработанного метода является то, что, благодаря выбранному неравномерному шагу дискретизации, исходной информацией для расчетов служат значения частотных характеристик в точках, делящих логарифмическую шкалу частот на равные отрезки, что позволяет охватывать любые диапазоны частот.

**Расчет частотных характеристик.** Для той же системы обратная задача — расчет частотной характеристики по экспериментально определенной кривой переходного процесса — решается на основании уравнения

$$P(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

Вид входной функции  $x(t)$  обычно бывает известен, и ее комплексный спектр  $X(j\omega)$  вычисляется аналитически. Основная трудность, таким образом, заключается в расчете комплексного спектра  $Y(j\omega)$  экспериментально определенной кривой переходного процесса  $y(t)$ . Рассмотренный в данной статье метод дает эффективный путь решения этой задачи по следующим причинам. Для кривой переходного процесса, вызванного типовым неперерывным воздействием (обычно используется воздействие в виде единичной или импульсной функции), характерно быстрое изменение после начала процесса и медленное стремление к установившемуся значению при  $t \rightarrow \infty$ . При выбранном неравномерном шаге дискретизации отсчеты кривой переходного процесса берутся по мере затухания процесса все реже, благодаря чему, по сравнению с равномерным шагом объем исходной информации для расчетов существенно уменьшается.

**Пример расчета.** Импульсная переходная функция  $y(t)$  системы самолет-автомат, описываемой линейным дифференциальным уравнением шестого порядка [4]

$$\frac{d^6 y}{dt^6} + 16,4 \frac{d^5 y}{dt^5} + 107,4 \frac{d^4 y}{dt^4} + 364,2 \frac{d^3 y}{dt^3} + 1146,5 \frac{d^2 y}{dt^2} + 771,2 \frac{dy}{dt} + 292,1 y = 0$$

при начальных условиях  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 20$ ,  $y''(0) = \dots = y^{(5)}(0) = 0$ , минимальная частотная характеристика системы  $P_1(\omega)$ , рассчитанные аналитически, показаны сплошными линиями на рис. 1 и 2. С помощью про-

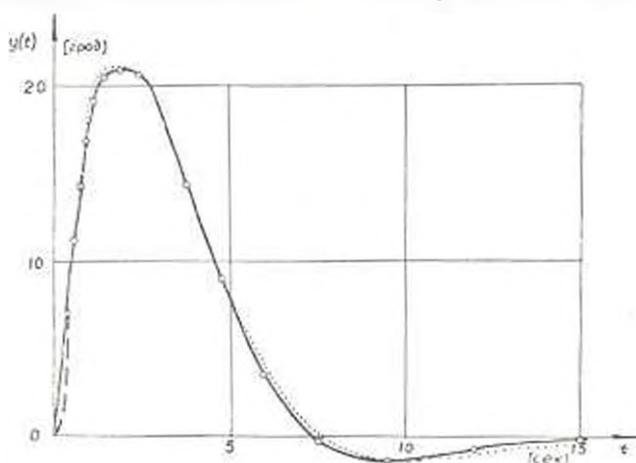


Рис. 1. Импульсная переходная функция системы, рассчитанная аналитически (сплошная кривая) и приближенно (точечная кривая), и аппроксимирующая ее функция  $S_1(t)$  (пунктирная кривая)

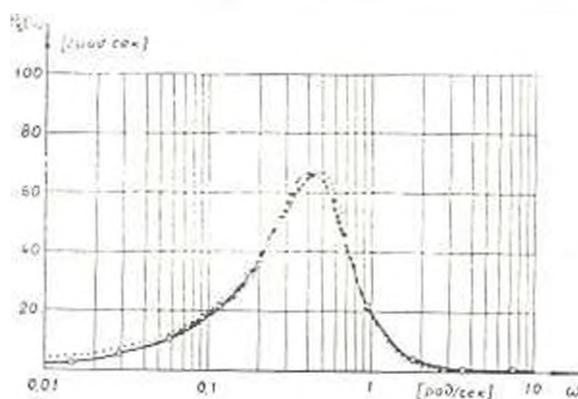


Рис. 2. Минимальная частотная характеристика системы, рассчитанная аналитически (сплошная кривая) и приближенно (точечная кривая), и аппроксимирующая ее функция  $S_1(\omega)$  (пунктирная кривая)

грамм, реализующих разработанные формулы численного преобразования Фурье на ЭЦВМ „Наири“, произведен расчет функции  $P_1(\omega)$  по кривой переходного процесса  $y(t)$  и наоборот.

Аппроксимация кривой переходного процесса произведена функцией  $S_n(t)$  по узловым точкам  $t_k = 15:1,26^k$  ( $k = 0, 1, \dots, 14$ ), показанным кружками. Как видим, благодаря неравномерному шагу, при небольшом числе узловых точек достигается совпадение функции  $S_n(t)$  (показана пунктиром) с кривой переходного процесса. Небольшое расхождение между ними при  $t$ , близких к нулю, может быть устранено увеличением числа узловых точек. Функция  $P_1(\omega)$ , рассчитанная по разработанным формулам численного преобразования Фурье, показана на рис. 2 точечной кривой.

Для расчета импульсной переходной функции  $y(t)$  кривая  $P_1(\omega)$  аппроксимирована функцией  $S_1(\omega)$  по узловым точкам  $\omega_k = 7,578 \cdot 2^k$  ( $k = 0, 1, \dots, 10$ ), показанным кружками, которые делят логарифмическую шкалу на равные части. В масштабе рис. 2 кривые  $P_1(\omega)$  и  $S_1(\omega)$  (показана пунктирной кривой) практически сливаются. Поэтому и кривая переходного процесса, рассчитанная по формулам численного преобразования Фурье, с хорошей точностью совпадает с аналитически рассчитанной кривой  $y(t)$ .

Данный пример наглядно демонстрирует эффективность выбранного неравномерного шага дискретизации при обработке частотных и временных характеристик линейных систем; при сравнительно небольшом числе узловых точек достигается высокая точность аппроксимации функцией  $S_n(x)$ , благодаря чему высока и точность расчетов искомым функций.

АрмНИИЭ

Поступило 22.III.1971.

Գ. Ս. ՄԱՋՐԱՅԱՆ, Վ. Ի. ՍԱՀԱԿՅԱՆ

ԱՆՅՈՂԻՒ ՊՐՈՑԵՍՆԵՐԻ ԵՎ ԳՆԱՅԻՆ ՍԵՍՏԵՄՆԵՐԻ ՀԱՃԱԽՈՒԱԿՆԱԿԱՆ  
ԸՆՈՒԹԱԿՐԵՐԻ ՀԱՇՎԱԿՐՈՒՄՆԵՐԻՈՒ ԶՈՒՐՅԻՆ ՉԵՎԱՓՈԽՈՒՄՆԵՐԻ  
ՀԱՇՎՈՒՄՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հոդվածում արտածվում են Ֆուրյեի սինուս և կոսինուս ձևափոխումների մոտավոր հաշվարկի բանաձևերը, կառուցված այնպիսի ձևով, որ հաշվարկի համար որպես նախնական ինֆորմացիա են ծառայում ձևափոխվող ֆունկցիայի դիսկրետ արժեքները այն կետերում, որոնք գառավորված են աճող երկրաչափական պրոգրեսիայի օրենքով: Նշվում է այդ սկզբունքի բնարժան էֆեկտիվությունը դժային սխտեմների համախալանական և մամանակային բնութագրերի մշակման ժամանակ: Մշակված բանաձևերը օգտագործվում են հետևյալ նմանատիպ խնդիրների լուծման ժամանակ.

ա) անցդիկ պրոցեսների հաշվարկը դժային սխտեմներում իր համախալանական բնութագրով,

բ) համախալանական բնութագրի հաշվարկը, որը կատարվում է անցդիկ պրոցեսի փորձարկումների միջոցով ստացված կորով:

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Cochran W. T. et al. What is the Invt Fourier transform? IEEE Trans. Audio and Electroacoust., 1967, vol. AU-15, № 2, 15-55.
2. Мелконян Д. С. Метод аппроксимации динамических характеристик эквивалентными синусоидальными функциями. Известия АН Арм. ССР (серия Т.Н.), т. XXII, № 5, 1969.
3. Кривош В. И., Шудыкин А. Т. Справочная книга по численному интегрированию. Изд. «Наука», 1966.
4. Солодовникова Р. В., Тинчова Ю. И., Крутицкий Г. В. Частотный метод построения переходных процессов с приложением таблиц и номограмм. Техтеоретика, 1955.