

Ю. А. САРКИСЯН

К СИНТЕЗУ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРАВЛЯЮЩЕГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА

Пространственные механизмы находят растущее применение в современных машинах-автоматах, приборах, системах управления и ориентации. В связи с этим в последние годы большее значение приобрели вопросы анализа и синтеза пространственных движений. Метрическому синтезу пространственных направляющих механизмов посвящены работы [1-3]. В настоящей статье рассматривается общая задача воспроизведения заданной пространственной кривой посредством четырехзвездчатого рычажного механизма.

Постановка задачи. Дана пространственная кривая γ , которая может быть определена:

а) параметрическими уравнениями

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t);$$

б) уравнениями двух пересекающихся поверхностей

$$\begin{aligned} F_1(x, y, z) &= 0 \\ F_2(x, y, z) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

в) заданными позициями точек кривой γ , т. е. таблицей соответствующих значений координат x, y, z .

Требуется спроектировать пространственный четырехзвездчатый траектория некоторой точки шатуна которого мало отличается от заданной кривой на требуемом участке $[x_0, x_1]$.

Размеры и расположение приближающей шатунной кривой точки E в координатной системе $Oxyz$ (рис. 1, а) зависят от двенадцати постоянных параметров, в которые входят: координаты $x_A, y_A, z_A, x_D, y_D, z_D$ неподвижных точек A и D , углы β_1, γ_1 и β_2, γ_2 , составленные осями вращения I и II с координатными осями Ox и Oy , длины a и c рычагов AB и CD , углы μ, ν между перпендикуляром ll к плоскости прорези кинематической пары C и направлениями продольной оси звена CD и его оси вращения I, угол λ между продольной осью пальца и отрезком EC , расстояние k между чертящей точкой E и центром шарового шарнира C , координаты m, h, l точки B в связан-

ной с шатуном подвижной системе $Sx'y'z'$, в которой координатная плоскость $Sx'y'$ проходит через ось pp и отрезок CE .

Большинство известных аналитических методов проектирования механизмов основывается на том, что в качестве функции, характеризующей отклонение от заданной зависимости (кривой), может быть принято выражение перемещения дополнительного ползуна, условно

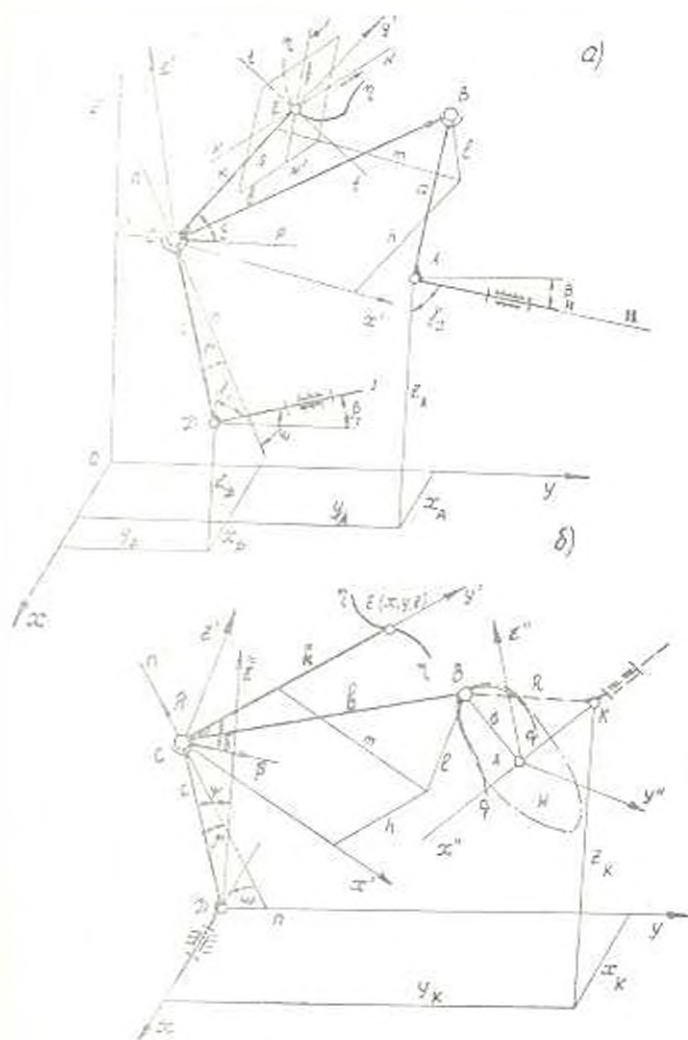


Рис. 1.

вводимого в схему механизма по направлению одного из звеньев. Умножая эту функцию на параметрический вес (двукратное произведение длины одного из звеньев), получаем удобное для минимизации выражение внешней разности [4].

Посмотрим, возможно ли использовать способ взвешенного приближения в рассматриваемой задаче. Потребуем, чтобы точка E двигалась по заданной пространственной кривой τ , накладывая таким об-

разом два новых условия связи, поскольку исключается возможность перемещения точки E вдоль главной нормали NN' и бинормали $N'A''$, лежащих в нормальной плоскости S . Следовательно, для обеспечения единичной подвижности преобразованного механизма с новой траекторной парой $\eta\eta'$ необходимо дополнительно ввести в схему два ползуна, перемещающихся по направлениям звеньев CD и AB . Теперь нетрудно убедиться, что определив размеры механизма так, чтобы перемещения ползунков мало отличались от нуля в заданном интервале $[x_{11}, x_{12}]$, тем самым обеспечиваем требуемое приближение шатунной кривой точки E четырехзвенника $ABCD$ к кривой $\eta\eta'$. Однако, как показывает анализ, перемещения ползунков выражаются через параметры механизма и координаты точки E в виде сложных иррациональных функций, каждая из которых включает весь набор искомого параметров. Поэтому в данном случае эквивалентная задача минимизации двух введенных разностей по существу не отличается по сложности от исходной задачи минимизации структурной ошибки механизма, т. е. ошибки, приближающей шатунную кривую по сравнению с заданной кривой $\eta\eta'$. Ниже, для синтеза пространственного направляющего четырехзвенника, разнится некоторая иная разновидность общего метода введенного приближения.

Для упрощения поставленной задачи перенесем начало координат в точку D и совместим координатную ось Ox с осью вращения I , таким образом исключая из рассмотрения параметры $x_1, y_0, z_0, \gamma_1, \beta_1$ (рис. 1, б). Если вести произвольную точку E шатуна двухповодковой группы DCE по заданной кривой $\eta\eta'$, то точка B данной одноподвижной кинематической цепи опишет определенную траекторию qq' в пространстве. Теперь легко видеть, что приблизив эту траекторию на требуемом участке к дуге окружности, далее присоединив к кинематической цепи рычаг AB , точка B которого описывает данную окружность, и удалив траекторную пару qq' , получим пространственный четырехзвенник, точка E которого движется по траектории, мало отличающейся от кривой $\eta\eta'$ в интервале приближения. В таком случае вместо поставленной задачи можно рассмотреть эквивалентную ей задачу о приближении к окружности пространственной шатунной кривой точки B .

Кривая в пространстве может быть определена как геометрическое место точек пересечения двух поверхностей. Соответственно окружность можно рассмотреть как линии пересечения сферы и плоскости. Следовательно, чтобы на требуемом участке траектория точки B мало отличалась от окружности, должны быть приближенно выполнены следующие два условия:

1. Точки траектории qq' (позиции точки B) на участке приближения должны лежать на сфере.
2. Точки траектории qq' на участке приближения должны находиться в одной плоскости.

Первое условие записывается в виде равенства:

$$G_1 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - R^2 = 0, \quad (2)$$

где K — центр сферы, а K — ее радиус.

Второе условие обеспечивается, если координаты точки B во всех положениях внутри интервала приближения удовлетворяют уравнению некоторой плоскости H :

$$G_2 = Mx_B + Ny_B + LZ_B + T = 0. \quad (3)$$

К тому же равенству приходим также другим путем. Поместим начало новой системы координат в точку A и направим ось абсцисс по оси вращения II звена AB . Если пространственная траектория qq имеет некоторый участок, точки которого лежат в координатной плоскости $z'Ay'$, то абсциссы их, очевидно, равны нулю. Принимая во внимание известные формулы преобразования координат, получаем:

$$x_B = x_A, \quad x_B \cos \alpha_{II} = y_A \cos \beta_{II} + z_A \cos \gamma_{II} = 0, \quad (4)$$

где $\cos \alpha_{II}$, $\cos \beta_{II}$, $\cos \gamma_{II}$ — направляющие косинусы оси Ax' (оси вращения II).

Выражения (3) и (4) являются общим и нормальным уравнениями плоскости приближаемой окружности, т. е. координатной плоскости $z'Ay'$. Для приведения общего уравнения (3) к нормальному виду (4) достаточно умножить его на нормирующий множитель

$$\frac{1}{\sqrt{M^2 + N^2 + L^2}}.$$

Перед тем как непосредственно перейти к определению неизвестных размеров механизма, выразим координаты x_B , y_B , z_B , входящие в равенства (2) и (3), через искомые параметры и известные координаты x , y , z чертящей точки E .

Рекуррентные соотношения между координатами точек B и E двухповодковой пространственной группы DCB . В данном случае имеем задачу определения положения точки B шатуна трехзвенного механизма с вышней (траекторной) парой при заданных значениях координат x , y , z точки E .

Сначала выведем зависимость угла поворота ψ звена CD от координат x , y , z . С этой целью воспользуемся условием постоянства расстояния CB в координатной форме:

$$(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2 = k^2. \quad (5)$$

Подставляя в выражение (5) соотношения:

$$x_C = 0; \quad y_C = -c \sin \psi; \quad z_C = c \cos \psi, \quad (6)$$

после ряда преобразований получаем квадратное уравнение относительно $\sin \psi$, решение которого представляется в виде

$$\sin \psi = \frac{-V \pm \sqrt{V^2 - 4WQ}}{2W}, \quad (7)$$

где

$$V = 4c^2(y^2 + z^2);$$

$$W = 4cy(y^2 + c^2 - k^2);$$

$$Q = c^4 - k^4 - 2c^2k^2 - 4c^2z^2 + 2\rho^2(c^2 - k^2) - \rho^4;$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Определив по формуле (7) угол φ , по соотношениям (6) находим координаты точки B .

Свяжем с патуном CBE подвижную систему координат $Cx'y'z'$, направив ось ординат по отрезку CB , а ось абсцисс перпендикулярно плоскости, проходящей через ось симметрии пальца и отрезок CE . Направляющие косинусы оси Cy' определяются по соотношениям:

$$\cos \beta_2 = \frac{x - x_c}{k}; \quad \cos \beta_3 = \frac{y - y_c}{k}; \quad \cos \beta_4 = \frac{z - z_c}{k}. \quad (8)$$

Для нахождения направления перпендикуляра nn к плоскости прорези имеем условие $\varphi_k = 180^\circ - \psi$, а также равенство:

$$-\sin \psi \cos \beta_n + \cos \psi \sqrt{1 - \cos^2 \beta_2 - \cos^2 \beta_3} = \cos \varphi. \quad (9)$$

Преобразуя равенство (9), получаем квадратное уравнение относительно $\cos \beta_n$, решение которого имеет вид:

$$\cos \beta_n = -\sin \psi \cos \psi + \sqrt{\sin^2 \psi \cos^2 \psi + \cos^2 \psi \sin^2 \psi}. \quad (10)$$

Направляющий косинус $\cos \beta_n$ равен радикалу в равенстве (9).

Для вычисления значений углов α_p, β_p , определяющих направление оси pp пальца, напишем условие перпендикулярности прямых nn и pp , а также выражение скалярного произведения ортов осей pp и Cy' :

$$\left. \begin{aligned} &\cos \alpha_p \cos \psi + \cos \beta_p \cos \beta_n + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_p - \cos^2 \beta_p} \\ &\quad \times \sqrt{1 - \cos^2 \beta_2 - \cos^2 \beta_3} = 0 \\ &\cos \alpha_p \cos \alpha_n + \cos \beta_p \cos \beta_n + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_p - \cos^2 \beta_p} \\ &\quad \times \sqrt{1 - \cos^2 \beta_2 - \cos^2 \beta_3} = \cos \delta \end{aligned} \right\}. \quad (11)$$

Далее определяем направляющие косинусы оси Cx' . Используя условие ее перпендикулярности к оси Cy' и известный угол $90^\circ - \delta$ между осями Cx' и pp , имеем:

$$\left. \begin{aligned} &\cos \alpha_1 \cos \alpha_p + \cos \beta_1 \cos \beta_p + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \beta_1} \\ &\quad \times \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_p - \cos^2 \beta_p} = 0 \\ &\cos \alpha_1 \cos \alpha_n + \cos \beta_1 \cos \beta_n + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1 - \cos^2 \beta_1} \\ &\quad \times \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_p - \cos^2 \beta_p} = \sin \delta \end{aligned} \right\}. \quad (12)$$

где углы $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2$ найдены по формулам (8) и (11).

Наконец, направление третьей координатной оси Cz устанавливаем при помощи следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \sqrt{1 - \cos^2 \beta_1 - \cos^2 \gamma_1} &= 0 \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_1 + \cos \beta_2 \cos \beta_1 + \cos \gamma_2 \sqrt{1 - \cos^2 \beta_2 - \cos^2 \gamma_2} &= 0 \end{aligned} \right\},$$

выражающей условие ортогональности координатных осей.

Для вычисления значений направляющих косинусов по полученным формулам необходимо задаваться величинами c, k, μ, ν, δ . При принятых обозначениях $x_E = m, y_E = h, z_E = l$ искомые рекуррентные соотношения могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} x_B &= m \cos \beta_1 + h \cos \alpha_1 + l \cos \gamma_1; \\ y_B &= y_E + m \cos \beta_2 + h \cos \beta_1 + l \cos \beta_2; \\ z_B &= z_E + m \cos \gamma_1 + h \cos \gamma_2 + l \cos \gamma_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Формулы (14) значительно упрощаются, если чертящая точка E расположена на продольной оси CB . В этом частном случае, соответствующем условиям $m=0, l=0$, рекуррентные соотношения принимают вид:

$$\begin{aligned} x_B &= h \cos \alpha_1; \\ y_B &= y_E + h \cos \beta_1; \\ z_B &= z_E + h \cos \gamma_1. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя значения $\cos \beta_1, \cos \beta_2, \cos \gamma_2$ из формул (8) и производя преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{h}{k} x_E; \\ y_B &= y_E + \frac{h}{k} (y_E - y_C); \\ z_B &= z_E + \frac{h}{k} (z_E - z_C). \end{aligned} \quad (16)$$

Целевая функция и определение искомых размеров. Задача синтеза пространственного направляющего четырехзвенника в вышеприведенной постановке сводится к минимизации выражений (2) и (3) в заданном интервале приближения $|x_n, x_n|$. Поэтому целевую функцию можно образовать в следующем виде:

$$G = \sum_{i=1}^n G_{1i}^2 + \sigma \sum_{i=1}^n G_{2i}^2. \quad (17)$$

где n — число выбранных точек на отрезке приближения кривой γ_k , а σ — некоторое положительное число, варьируя значением которого, каждой из двух сумм в формуле (17) можно приписать большую или меньшую роль в процессе минимизации. Для простоты примем $\sigma = 1$.

Подставляя найденные рекуррентные соотношения (14) в выражения (2) и (3) и преобразуя с учетом соотношений:

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha_i &= \cos^2 \beta_i = \cos^2 \gamma_i = 1 \\ \cos \alpha_i \cos \gamma_i &= \cos \beta_i \cos \gamma_i = \cos \gamma_i \cos \gamma_i = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} i &= 1, 2, 3; \\ j &= 1, 2, 3; i \neq j, \end{aligned}$$

целевую функцию можно привести к виду:

$$\begin{aligned} G = & \sum_{i=1}^n [2m(y_{ci} \cos \beta_{1i} - z_{ci} \cos \gamma_{1i}) + 2h(y_{ci} \cos \beta_{2i} - z_{ci} \cos \gamma_{2i}) + \\ & + 2l(y_{ci} \cos \beta_{3i} - z_{ci} \cos \gamma_{3i}) - 2mx_i \cos \gamma_{1i} - 2hx_i \cos \alpha_{2i} - 2lx_i \cos \alpha_{3i} - \\ & - 2my_k \cos \beta_{1i} - 2hy_k \cos \beta_{2i} - 2ly_i \cos \gamma_{3i} - 2mz_k \cos \gamma_{1i} - 2hz_k \cos \gamma_{2i} - \\ & - 2lz_k \cos \gamma_{3i} - 2y_c y_k - 2z_c z_k + m^2 + h^2 + l^2 + c^2 + x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 \cdot R] + \\ & + \sum_{i=1}^n [Mm \cos \alpha_{1i} + Mh \cos \alpha_{2i} + Ml \cos \alpha_{3i} + Nm \cos \beta_{1i} + Nh \cos \beta_{2i} + \\ & + Nl \cos \beta_{3i} + Lm \cos \gamma_{1i} + Lh \cos \gamma_{2i} + Ll \cos \gamma_{3i} + Ny_{ci} + Lz_{ci} - T]^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Из условий минимума функции (18) целесообразно определить только параметры $m, h, l, x_k, y_k, z_k, R, \beta_{1i}, \gamma_{1i}$, предварительно задаваясь величинами $c, k, \alpha, \mu, \omega$, входящими в выражения направляющих косинусов, и координат y_c, z_c , так как только в этом случае удастся образовать выражение G , коэффициенты которого представляют собой суммы от значений известных функций переменной x в выбранных точках, вычисляемые до процедуры минимизации. Нетрудно заметить, что при обращении в нуль величины целой функции обращается в нуль также величина отклонения Δ шатунной кривой точки E от заданной кривой γ_k , следовательно, число точек пересечения шатунной кривой с заданной траекторией равно числу точек пересечения траектории qq точки B вспомогательного механизма с окружностью.

Вычисление всех одиннадцати неизвестных коэффициентов $x_k, y_k, z_k, R, M, N, L, T, m, h, l$ функции (18) из необходимых условий ее минимума сводится к достаточно сложной системе нелинейных уравнений. Применение метода Лагранжа тоже не приводит к заметным упрощениям. Поэтому для нахождения минимума целевой функции целесообразно использовать поисковые методы (метод градиента, поискового спуска и случайного поиска).

После определения искомых параметров находим значения углов $\alpha_{1i}, \beta_{1i}, \gamma_{1i}$ по формулам:

$$\begin{aligned}\cos \gamma_{11} &= \frac{M}{\sqrt{M^2 + N^2 + L^2}}; \\ \cos \gamma_{12} &= \frac{N}{\sqrt{M^2 + N^2 + L^2}}; \\ \cos \gamma_{33} &= \frac{L}{\sqrt{M^2 + N^2 + L^2}}.\end{aligned}\quad (19)$$

Для определения координат точки A (точки пересечения оси I с плоскостью II) сначала находим расстояние центра K от данной плоскости:

$$d = \frac{M_x + N_y + L_z + T}{M^2 + N^2 + L^2},$$

затем, принимая во внимание соотношения (19), получаем:

$$x_1 = \frac{dM}{\pm \sqrt{M^2 + N^2 + L^2}} + x_0;$$

Длина звена АВ равна:

$$a = |(x_0 \ x_1) \cdot (y_0 \ y_1)| \cdot |(z_0 \ z_1)|.$$

Брянский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 17.IX.1970.

Пол. 1. 1116911311.

ՏԱՐԱԼՆԵԱՆ ԱՌԴՆՈՐԳԻՉ ԲԱՌՈՂԱՌԻ ՄԻՆԵՐԻՉԻ ՂԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

11. 4 11 11 11 11 11

Հոգի ունի նշխարում է տարածական բառույթի մեխանիզմի մեխանիզմի հիմնականը՝ բառ շարժման հիմնական տարրում։ Քանի որ բառը շարժվում է տարածական համակարգում շարժման հիմնական շարժման համակարգում։

J H T E P A T S P A

1. Шахбазян К. Х. Синтез пространственных направляющих и передаточных механизмов. «Механика машин», № 12, 1967

2. Лебедев П. А. Синтез направляющей прост — тичного четырехзвенного кривошипно-кривошипового механизма. Сб. „Анализ и синтез механизмов“, Машиностроение, 1969.
3. Угалоу Аналитический синтетический синтез механизмов посредством комплексных перемещений. „Конструирование и технологии машиностроения“, № 2, 1965.
4. Леонтьев Н. И. Проектирование механизмов — низшими парами. Изд-во АН СССР, 1950.