Е. А. ВОЛЬМИР

ВЫПУЧИВАНИЕ ПЛАСТИНОК И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ОСЕВОГО ДИНАМИЧЕСКОГО СЖАТИЯ

1. Рассмотрим пологую круговую цилиндрическую панель, шарнирно закрепленную по краям, и предположим, что она подвергается динамическому сжатию вдоль образующей. Поставим перед собой цель определить характер выпучивания панели в зависимости от скорости нагружения, геометрических параметров и начальной прогиби.

Выпишем основные динамические уравнения нелинейной теории пологих оболочек. Будем считать, что скорости взаимного смещения кромок панели мала по сравнению со скоростью распространения звука в материале панели. В связи с этим будем учитывать лишь инерционный член, соответствующий нормальному прогибу панели, отказываясь от рассмотрения процесса распространения упругих волн в ее срединной поверхности. Полный прогиб точек срединной поверхности обозначим через $w = w(x, y, t)$. Координаты x, y будем откладывать соответственно вдоль образующей и по дуге панели. Предположим, что панель является неидеальной, и введем начальный прогиб $w_0 = w_0(x, y)$.

Уравнение движения элемента панели в этом случае примет вид [1]:

$$\frac{D}{h}\nabla^4(w - w_0) = L(w, \Phi) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{q}{h} - \frac{\gamma}{g}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

а условие совместности деформаций будет

$$\frac{1}{E}\nabla^4\Phi = -\frac{1}{2}\left[L(w, w) - L(w_0, w_0)\right] - \frac{1}{R}\frac{\partial^2(w - w_0)}{\partial x^2}. \qquad (2)$$

Здесь R и h—радиус кривизны срединной поверхности и толщина панели, $D = Eh^3/12(1-\mu^2)$ — цилиндрическая жесткость, γ — удельный вес материала, q — интенсивность поперечной нагрузки, Φ—функция напряжений в срединной поверхности. $L(w, \Phi)$ — известный билинейный оператор.

Будем решать задачу в первом приближении, пользуясь методом Бубнова—Галеркина.

Рассмотрим случай, когда усилие сжатия p возрастает во времени по закону $p = st$, и будем предполагать, что динамическое выпучивание панели происходит до того, как нагрузка достигает своего максимального значения. Выберем в качестве аппроксимирующих функций для полного и начального прогибов выражения

$$w = f\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \quad w_0 = f_0\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \qquad (3)$$

Отметим, что стороны a и b ориентированы соответственно вдоль образующей и по дуге панели. Под m понимается число полуволн вдоль стороны a, под n — число полуволн вдоль b. Подставляя выражения (3) в правую часть уравнения (2) и интегрируя его, находим функцию Φ в виде

$$\Phi = \frac{E}{32}(f^2 - f_0^2)\left[\left(\frac{n}{m}\frac{a}{b}\right)^2 \cos\frac{2m\pi x}{a} - \left(\frac{m}{n}\frac{b}{a}\right)^2 \cos\frac{2n\pi y}{b}\right] +$$

$$+ \frac{E}{\pi^2 R}(f - f_0)\left(\frac{m}{a}\right)^2 \frac{1}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} - \frac{py^2}{2}. \tag{4}$$

Далее применяем метод Бубнова-Галеркина по отношению к уравнению (1). Выполняя интегрирование, приходим к следующей зависимости:

$$\left\{\bar{p} - \frac{\pi^2}{768(1-\mu^2)}\left[\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{n^2\lambda}{m}\right)^2\right](\zeta^2 - \zeta_0^2) + \alpha\frac{32}{3} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{knm}{\pi^2}\left[\frac{\lambda}{m^2 + (\lambda n)^2}\right]^2 (\zeta - \zeta_0)\right\}\zeta - \left\{\frac{\pi^2}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{m}{\lambda} + \frac{n^2\lambda}{m}\right)^2 +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{km}{\pi}\right)^2\left[\frac{\lambda}{m^2 + (\lambda n)^2}\right]^2 - \alpha\frac{2}{3}\frac{kn\lambda^2}{\pi^2 m^3}(\zeta - \zeta_0)\right\}(\zeta - \zeta_0) +$$

$$+ \alpha\frac{16\lambda^2}{\pi^4 m^3 n}\bar{q} - \frac{\gamma}{Eg}\left(\frac{b^2}{h}\frac{\lambda}{\pi m}\right)^2\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0. \tag{5}$$

Здесь введены безразмерные параметры: $\zeta = f/h$, $\zeta_0 = f_0/h$, $\lambda = a/b$, $k = b^2/Rh$; $\bar{p} = pb^2/Eh^2$, $\bar{q} = qb^4/Eh^4$. Коэффициент $\alpha = 1$, если m и n нечетные, если же хотя бы один из этих параметров четный, то $\alpha = 0$.

Отбросив в уравнении (5) инерционный и нелинейные члены и считая $\zeta_0 = 0$, придем, для безразмерного верхнего критического напряжения при квазистатическом нагружении, когда $\lambda = 1$, к выражению

$$\bar{p}_{кр} = \frac{\pi^2}{3(1-\mu^2)} + \frac{k^2}{4\pi^2}. \tag{6}$$

Разделим каждый из членов уравнения (5) на $\bar{p}_{кр}$ и введем обозначение $\bar{t}$ для безразмерного параметра времени:

$$\bar{t} = \frac{st}{\bar{p}_{кр}} = \frac{\bar{p}}{\bar{p}_{кр}}. \tag{7}$$

В результате получим обыкновенное дифференциальное нелинейное уравнение относительно стрелы прогиба:

$$\frac{1}{S}\frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\zeta-\zeta_0}{\beta}\left\{\pi^4\left[\left(\frac{m}{\lambda}\right)^2 + n^2\right]^2 + 12(1-\mu^2)\left[\frac{m^2k}{m^2+(\lambda n)^2}\right]^2 +\right.$$

$$+\zeta(\zeta-\zeta_0)\frac{3}{4}\pi^4(1-\mu^2)\left[\left(\frac{m}{\lambda}\right)^4 + n^4\right] - \alpha\zeta\, 128\frac{(1-\mu^2)knm^3}{[m^2+(\lambda n)^2]^2} -$$

$$\left.-\alpha(\zeta+\zeta_0)\,8\frac{nk}{m}(1-\mu^2)\right\} - \frac{\alpha}{\beta}192\frac{1-\mu^2}{\pi^2 nm}\bar{q} - \left(\frac{m}{\lambda}\right)^2\zeta\bar{t} = 0, \quad (8)$$

в котором через β обозначено выражение $\beta = 4\pi^4/3(1-\mu^2)k^2$, а под S понимается величина

$$S = \bar{p}_{кр}^{-2}\left(\frac{\pi cE}{s}\frac{h^3}{b^3}\right)^2. \quad (9)$$

Здесь c — скорость звука в материале панели: $c = (Eg/\gamma)^{\frac{1}{2}}$. Интегрируя уравнение (8), найдем зависимость $\zeta(t)$.

Вычисления проводились с помощью метода Рунге-Кутта на ЭЦВМ; шаг по времени h_t принимался равным $h_t = 0{,}01$. Предварительно была исследована практическая сходимость решения; дальнейшее уменьшение h_t не оказывало сколько-нибудь заметного влияния на результаты вычислений. Описанный выше алгоритм был применен для решения ряда конкретных задач.

В частности автором решена задача выпучивания пластинок и цилиндрических панелей под действием осевого динамического сжатия.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. Наука, М., 1967.

Е. А. НЕРСЕСЯН, Р. С. БАЯТЯН

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ГРАФИКОВ АКТИВНЫХ И РЕАКТИВНЫХ НАГРУЗОК РАСПРЕДЕЛИТЕЛЬНЫХ ТРАНСФОРМАТОРОВ ГОРОДСКИХ СЕТЕЙ

Для правильного определения фактических и расчетных нагрузок при эксплуатации и проектировании электрических сетей необходимо изучить режимы (графики) активных и реактивных нагрузок существующих сетей, выявить законы их формирования и факторы, влияющие на изменение и рост нагрузки. Решением подобных задач занимались многие организации для промышленных предприятий и электрических систем [1—3].

В связи с бурным развитием жилищного строительства, с одной стороны, и появлением в быту потребителей реактивной мощности, с другой, вопросы исследования активных и реактивных нагрузок город-