ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXIV, № 4, 1971 Серия технических наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

М. А. ЗАДОЯН, А. М. МУРАДЯН

О НЕЛИНЕЙНОЙ ПОЛЗУЧЕСТИ БЕТОНА ПРИ ВЫСОКИХ ТЕМПЕРАТУРАХ

Экспериментальному исследованию жароупорного бетона при высоких температурах $100 < T < 1000$ посвящена работа В. А. Харламова [1]. В работе экспериментальным путем определены и построены графики изменения во времени деформации ползучести в зависимости от продолжительности действия нагрузки, от относительных напряжений $\frac{\sigma}{R}$ и от температуры. С начала и до конца опытов напряжения и температура испытуемых образцов оставались постоянными. Как показывают результаты опытов [1], весь диапазон изменения температуры можно разделить на два качественно отличающихся интервала $100^\circ < T_1 < 500$ и $500 < T_2 < 1000$.

Первый интервал характерен тем, что скорость деформации ползучести в течение времени затухает и с некоторого момента $\frac{d\varepsilon^*}{dt} = 0$. Второй интервал характерен беспредельным возрастанием во времени деформации ползучести $\left(\text{в зависимости } \frac{\sigma}{R}\right) \lim_{t\to\infty} \varepsilon^*(t) = \infty$, то есть по характеру протекания деформации ползучести, бетон становится весьма близким к металлам. К рассмотрению стационарных задач термоползучести при высоких температурах посвящены работы [2], [3]. В настоящей работе сделана попытка распространить теорию упругоползучего тела Маслова-Арутюняна [4] для высоких температур, когда мера ползучести и модуль упругости существенно зависят от температуры.

Ядро ползучести. Аппроксимировать полученные экспериментальные зависимости единым аналитическим выражением для ядра ползучести, охватывающего весь интервал изменения температуры $100 < T < 1000$, затруднительно. Поэтому аппроксимирующие выражения ядра ползучести и модуля упругости выбираем для указанных выше качественно отличающихся интервалов разными. Учитывая существенно нелинейную зависимость деформации ползучести в зависимости от температуры, а также нелинейную зависимость между деформациями

ползучести и напряжениями, аппроксимирующие функции выбираем следующего вида:

$$\varepsilon_j^*(T,\ t,\ \sigma) = \frac{\sigma}{E_j(t)} + f(\sigma)\, C_j(t,\ T), \tag{1}$$

где при $j = 1$ $1100 \leqslant T \leqslant 500$; $j = 2$ $2500 \leqslant T < 1000$

$$C_1(t,\ T) = \frac{1 - e^{-\beta_1 t}}{(\alpha_1 - \beta_1 T)(p_1 - q_1 T)}; \quad C_2(t,\ T) = (\alpha_2 + \beta_2 T)\, t^{(p_2 - q_2 T)/(q_2 T)};$$

$$E_1(T) = E_0(\alpha_1 - \beta_1 T); \quad E_2(T) = E_0(\alpha_2 - \beta_2 T); \tag{2}$$

$$f(\sigma) = \sigma(\alpha + \beta|\sigma| + \gamma\sigma^2) = \sigma\left[\alpha + \beta_0\left|\frac{\sigma}{R}\right| + \gamma_0\left(\frac{\sigma}{R}\right)^2\right].$$

Параметры, входящие в эти выражения, имеют следующие значения:

$E_0 = 2 \times 10^5$ *кг/см²*; $R = 267$ *кг/см²*; $\alpha = 1{,}22$; $\beta = -1{,}105 \times 10^{-4}$ *см²/кг*;

$\gamma = 0{,}408 \times 10^{-8}$ *см⁴/кг²*; $\alpha_1 = 1{,}13$; $\beta_1 = 0{,}00113$ 1/*гр*; $\gamma_1 = 0{,}067$;

$P_1 = 1{,}834$; $q_1 = 0{,}00183$; $\alpha_2 = 12{,}48$; $\beta_2 = -11.85 \times 10^{-3}$;

$\gamma_2 = 3.53$; $P_2 = 8{,}67 \times 10^{-4}$; $q_2 = 5{,}98 \times 10^{-6}$; $\alpha_3 = 0{,}694$;

$\beta_3 = 0{,}0004$; $\beta_0 = -2{,}95$; $\gamma_0 = 2{,}91$.

При определении параметров принято, что кривые ползучести (рис. 1—2) подобны.

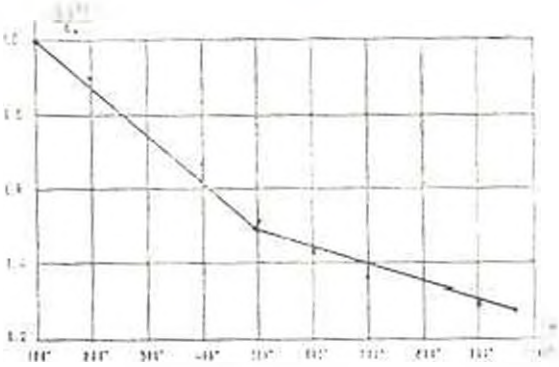

Рис. 1.

В экспериментальных данных [1] влияние возраста бетона на модуль упругости и деформации ползучести не учитывается, так как играет второстепенную роль.

Соотношения между деформациями и напряжениями. Предположим, что имеем семейство кривых ползучести (более общего вида, чем представленные на рис. 1—3), определяющих полную деформацию

$\varepsilon^*(t, \tau, T, \sigma)$ в момент t для различных постоянных значений T и $\frac{\sigma}{R}$.

Коэффициент температурного расширения заменяем его усредненным значением, так как при высоких температурах меняется незначитель-

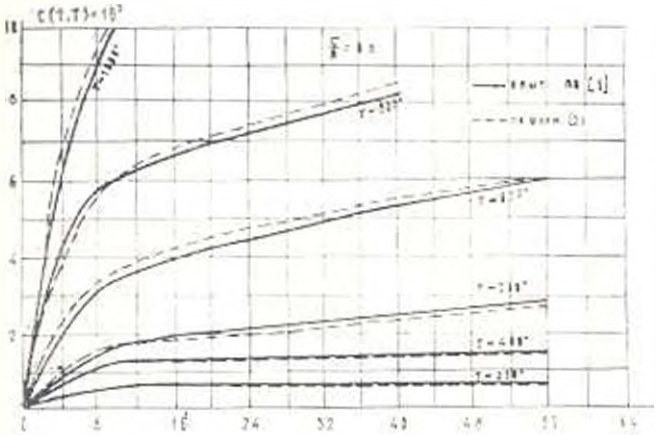

Рис. 2.

но. Пусть стержень с момента $t = \tau_0$ находится под совместным воздействием переменных во времени напряжений $\sigma(t)$ и температуры $T(t)$. Принимая принцип суперпозиции по времени [8] для полной деформации в момент t будем иметь выражение

$$\varepsilon(t) = \alpha_0 T(t) + \varepsilon^*[t, \tau_0, T(\tau_0), \sigma(\tau_0)] + \int_{\tau_0}^{t} \left[\frac{\partial \varepsilon^*(t, \tau, T, \sigma)}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial \varepsilon^*(t, \tau, T, \sigma)}{\partial T} dT \right], \tag{3}$$

учитывая, что $d\varepsilon^* = d\varepsilon^*_\sigma + d_T\varepsilon^* = d_\sigma\varepsilon^*$ получаем

$$\varepsilon(t) = \alpha_0 T(t) + \varepsilon^*[t, \tau, T(t), \sigma(t)] - \int_{\tau_0}^{t} \frac{\partial \varepsilon^*[t, \tau, T, \sigma]}{\partial \tau} d\tau. \tag{4}$$

В этих выражениях и в дальнейшем подынтегральные выражения σ и T зависят от τ. Подставляя значение ε^* из выражения (1), окончательно получаем следующее соотношение для линейного напряженного состояния:

$$\varepsilon^*(t) = \alpha_0 T(t) + \frac{\sigma(t)}{E_l(t, T)} - \int_{\tau_0}^{t} \sigma \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{1}{E_l(\tau, T)} d\tau - \int_{\tau_0}^{t} f[\sigma] \frac{\partial C_l(t, \tau, T)}{\partial \tau} d\tau. \tag{5}$$

Здесь $E_f(\tau, T)$ — модуль мгновенной деформации в возрасте τ при температуре $T(\tau)$, а $C_f[t, \tau, T]$ — деформация ползучести, отсчитанная от момента времени τ до момента t в условиях температуры $T(\tau)$ и единичного напряжения. В связи с этим для учета влияния высоких температур при нелинейной ползучести, когда кривые ползучести подобны, достаточно в соответствующих соотношениях [4] заменить $E_c(t, T)$ и $C(t, \tau)$ соответственно на $E_f(t, T)$ и $C_f(t, \tau, T)$. Следует отметить, что идея Дорна [5] о сведении влияния высоких температур к изменению масштабного фактора времени здесь не приемлема из-за большой сложности структуры полученных соотношений. Для объемного напряженного состояния соотношения между деформациями и напряжениями будут иметь вид:

$$\varepsilon_x(t) = \alpha_0 T(t) + \frac{(1-\nu)\sigma_x(t) - \nu S(t)}{E_f(t, T)} - \int_{\tau_0}^{t} [(1-\nu)\sigma_x - \nu S] \frac{\partial}{\partial \tau} \times$$

$$\times \frac{1}{E_c(\tau, T)} d\tau - \int_{\tau_0}^{t} [(1-\nu)\sigma_x - \nu S] f(\sigma_i) \frac{\partial C_f(t, \tau, T)}{\partial \tau} d\tau \qquad (6)$$

$$\gamma_{xy}(t) = 2(1+\nu)\frac{\tau_{xy}(t)}{E_f(t, T)} - \int_{\tau_0}^{t} \tau_{xy} \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{2(1+\nu)}{E_c(\tau, T)} d\tau -$$

$$- \int_{\tau_0}^{t} \tau_{xy} f(\sigma_i) 2(1+\nu) \frac{\partial C_f(t, \tau, T)}{\partial \tau} d\tau,$$

где x, y, z

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}.$$

Для линейной ползучести соотношения (6) принимают следующий вид

$$\varepsilon_x(t) = \alpha_0 T(t) + \frac{(1-\nu)\sigma_x(t) - \nu S(t)}{E_f(t, T)} -$$

$$- \frac{1}{E_f(t, T)} \int_{\tau_0}^{t} [(1-\nu)\sigma_x - \nu S] K_f[t, \tau, T(\tau)] d\tau;$$

$$\gamma_{xy}(t) = 2(1+\nu)\frac{\tau_{xy}(t)}{E_f(t, T)} - \frac{2(1+\nu)}{E_f(t, T)} \int_{\tau_0}^{t} \tau_{xy}(\tau) K_f(t, \tau, T) d\tau;$$

$$S = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z; \qquad (7)$$

$$K_i[t, \tau, T(\tau)] = E_i[t, T(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{1}{E_i[\tau, T(\tau)]} - C_i[t, \tau, T(\tau)] \right].$$

Поскольку экспериментальные данные об учете влияния возраста материала при высоких температурах отсутствуют, приближенно можно принять

$$E_i(t, T) = (1 - e^{-\gamma t})(\alpha_i - \beta_i T) E_c;$$

$$C_i(t, \tau, T) = \left(\frac{A_1}{\tau} - C_0 \right) C_i(t, \tau, T),$$

где μ_0 и A_1 имеют те же значения, что и при нормальных температурах.

Балка, защемленная в обоих концах. Рассмотрим напряженное состояние балки, концы которой в условиях температуры T_1 жестко защемлены. В дальнейшем балка подвергается охлаждению через торцевые сечения (температура среды T_0), и температурную функцию можно представить согласно [7] в таком виде

$$T(x, y) = T_1 + (T_0 - T_1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2B_1 \sqrt{B_1^2 - \mu_n^2}}{\mu_n (B_1^2 + B_1 - \mu_n^2)} e^{-\mu_n^2 \frac{\alpha t}{l^2}} \cos \mu_n \frac{x}{l},$$

где μ_n — корни уравнения (9)

$$\operatorname{ctg} \mu = \frac{1}{B_1} \mu; \quad B_1 = \frac{\alpha}{\lambda} R;$$

α — температуропроводность;

β — коэффициент теплоотдачи; λ — коэффициент теплопроводности.

Так как при охлаждении бетон деформируется с разными мерами ползучести и модулем упругости для разных интервалов температуры ($100^\circ \leqslant T \leqslant 500^\circ$; $500^\circ \leqslant T \leqslant 1000^\circ$), то необходимо рассматривать следующее

1. $T(x, T) > 500^\circ$; $0 \leqslant t \leqslant t_1$; $0 \leqslant x \leqslant l$

Уравнение деформации

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \alpha_0 T(x, t) - \frac{\sigma(t)}{E(t, T)} - \frac{1}{E(t, T)} \int_0^t f(\tau) K(t, \tau, T) d\tau$$

после интегрирования и удовлетворения граничных условий

$x = 0$ $u = 0$; $x = l$; $u = 0$ примет вид:

$$\sigma(t) = \int_0^t f(\tau) K^*(t, \tau, T) d\tau + \alpha_0 T^*(t) E^*(t, T)$$

$$T^*(t) = \int_0^l T(x, t)\,dx; \qquad \frac{1}{E^*(t, T)} = \int_0^l \frac{dx}{E(t, T)};$$

$$K^*(t, \tau, T) = \frac{\int_0^l \frac{K_0(t, \tau, T)}{E_0(t, T)}\,dx}{\int_0^l \frac{dx}{E(t, T)}}. \tag{10}$$

Полученное интегральное уравнение решаем методом последовательных приближений

$$\begin{aligned} z_0(t) &= -\alpha_0 T^2(t) E^*(t, T); \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n(t) &= z_0(t) - \int_0^t f(z_{n-1}) K^*(t, \tau, T)\,d\tau. \end{aligned} \tag{11}$$

Сходимость последовательных приближений будет обеспечена, если величины $z_0(t)$,

$$\int_0^t [f(z_0)]^2\,d\tau \quad \text{и} \quad \int_0^t [K^*(t, \tau, T)]^2\,d\tau$$

будут функциями с интегрируемым квадратом в области $0 \leq t \leq t_1$.

2. Если $100 \leq T(x, T) \leq 1000$ $t_1 \leq t \leq t_2$

$$0 \leq x_1 \leq l_1(t); \quad 0 \leq x_2 \leq l_2(t).$$

Уравнения деформации для участков x_1 и x_2

$$\varepsilon_x = \frac{du_1}{dx_1} = \alpha_0 T(x, t) - \frac{z(t)}{E_1(t, T)} - \frac{1}{E_1(t, T)} \int_0^t f(z) K_1(t, \tau, T)\,d\tau;$$

$$\varepsilon_x = \frac{du_2}{dx_2} = \alpha_0 T(x, t) - \frac{z(t)}{E_2(t, T)} - \frac{1}{E_2(t, T)} \int_0^t f(z) K_2(t, \tau, T)\,d\tau.$$

Интегрируя и удовлетворяя граничные условия

$$x_1 = 0 \;\; u_1 = 0; \quad x_2 = 0 \;\; u_2 = 0; \quad u_1|_{x_1 = l_1(t)} = -u_2|_{x_2 = l_2(t)}.$$

получаем следующее интегральное уравнение

$$\sigma(t) - \int_{\tau_0}^{t} f(\tau)\,\overline{K}(t,\ \tau,\ T)\,d\tau = \sigma_0 \frac{E_1^*(t,\ T) - E_2^*(t,\ T)}{E_1^*(t,\ T) - E_2^*(t,\ T)}\,T^*(t),$$

где введены следующие обозначения

$$\overline{K}(t,\ \tau,\ T) = \frac{E_1^*(t,\ T) - E_2^*(t,\ T)}{E_1^*(t,\ T) - E_2^*(t,\ T)}\,[K_1^*(t,\ \tau,\ T) - K_2^*(t,\ \tau,\ T)];$$

$$K_j^*(t,\ \tau,\ T) = \int_{\tau}^{t+\omega} \frac{K_j(t,\ \tau,\ T)}{E_j(t,\ T)}\,dx;\quad E_j^*(t,\ T) = \int_{t}^{t+\omega} \frac{dx}{E_j(t,\ T)}.$$

Применяя метод последовательных приближений, получаем

$$\sigma_n(t) = \sigma_0 \frac{E_1^*(t,\ T) - E_2^*(t,\ T)}{E_1^*(t,\ T) - E_2^*(t,\ T)}\,T^*(t) + \int_{\tau_0}^{t} f(\sigma_{n-1})\,\overline{K}(t,\ \tau,\ T)\,d\tau. \quad (12)$$

3. Аналогично предыдущим случаям получаем решение при $100 < T < 500$

$$\sigma_n(t) = \sigma_0\,T^*(t) + \int_{\tau_0}^{t} f(\sigma_{n-1})\,K_1^*(t,\ \tau,\ T)\,d\tau. \quad (13)$$

Когда температура меняется по линейному закону

$$T(t) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{t}{t_0}. \quad (14)$$

На вычислительной машине „Раздан—3" произведено вычисление $\sigma(t)$ для двух вариантов изменения температуры:

1. $T_1 = 100$; $T_2 = 300$; $t_0 = 100$.

2. $T_1 = 300$; $T_2 = 100$; $t_0 = 100$.

Согласно (11)

$$\sigma_n(t) = \sigma_0(t) + \int_{\tau_0}^{t} f(\sigma_{n-1})\,K_1(t,\ \tau,\ T)\,d\tau;$$

$$\sigma_0(t) = E_1(t,\ T)\,\alpha_c\,T(t).$$

На рис. 4 показан характер изменения напряжения в стержне во времени. В первом случае за счет интенсификации деформации ползучести при высоких температурах эффект возрастания напряжений почти компенсируется влиянием ползучести.

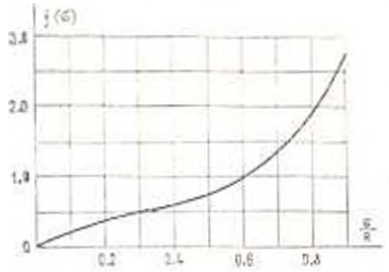

Рис. 3.

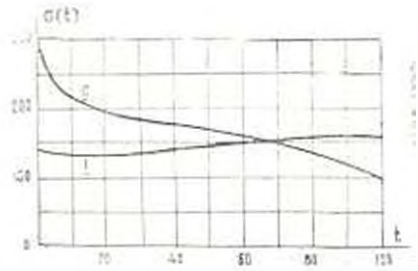

Рис. 4.

Рассмотрим приведенную задачу, принимая, что материал стержня подвергается линейной ползучести $f(\varepsilon) = \varepsilon$. Тогда

1. при $T(t) > 500$

(10) уравнение превращается в линейное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода, решение которого можно написать

$$\varepsilon(t) = -\varepsilon_0 T(t) E_2(t, T) - \varepsilon_0 \int_{\tau}^{t} T(\tau) E_2[\tau, T(\tau)] R_2(t, \tau, T)\, d\tau,$$

где

$$R_2(t, \tau, T) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\tau - P_2 T(t) - q_2 T(t)] \Gamma[\alpha_2 - \beta_2 T(t) - 1]}{(t-\tau)\Gamma[n(\alpha_1 - \beta_1 T(t) - 1)]} (t-\tau)^{n(\alpha_1 - \beta_1 T(t) - 1)} \tag{14}$$

— резольвента ядра $K_2(t, \tau, T)$.

2. При $T(t) < 500$.

Решение (12) уравнения при линейной ползучести будет иметь следующий вид

$$\varepsilon(t) = -\varepsilon_0 E_1(t, T) T(t) - \varepsilon_0 \int_{\tau}^{t} E_1[\tau, T(\tau)] T(\tau) R_1(t, \tau, T)\, d\tau,$$

где

$$R_1(t, \tau, T) = \frac{E_2(t, T)}{E_1[\tau, T(\tau)]} \frac{1}{a_1 - b_1 T(\tau)} e^{-(t-\tau)\int_{\tau}^{t} \frac{a_1}{a_1 - b_1 T(\tau)}}$$

— резольвента ядра $K_1(t, \tau, T)$.

Для вышеприведенной линейной температурной функции решение можно представить в следующем виде (при $T < 500$)

$$\varepsilon(t) = -E_0 \varepsilon_0 T_1 \gamma(t).$$

где

$$\chi(t) = (a_0 - b_0 t)\left[1 - \varphi(t) - \int_0^t \frac{(m - nt)^{1-(1-\varphi\tau)} e^{-\gamma(t-\tau)}}{(m - n\tau)^{1-\frac{1}{\varphi}}} d\tau\right]$$

$$a_1 = \alpha_1 E_0 C_0 \tau_0; \quad b_1 = \beta_2 E_0 C_0 \tau_0$$

$$a_0 = \alpha_1 - \beta_1 T_1; \quad b_0 = \beta_2 (T_2 - T_1)\frac{1}{t_0}$$

$$m = a_1 - b_1 T_1; \quad n = b_1 (T_2 - T_1)\frac{1}{t_0}; \quad \varphi = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)\frac{1}{t_0}.$$

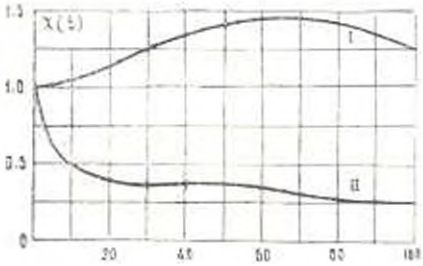

Рис. 5.

Для тех же двух вариантов изменения $T(t)$ приведены вычисления и построен график изменения $\chi(t)$ (рис. 5).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 30.X.1970

Ա. Ա. ՉԻՉՈՅԱՆ, Լ. Ա. ՍԻՐՈՒԽՅԱՆ

ԲԵՏՈՆԻ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔԻ ՋԵՐՄԱՍՏԻՃԱՆԱԿՈՒՄԸ

Ամփոփում

Հոդվածի սկզբում համառոտ նկարագրվում է Լ. Վ. Ռ. Խաչատուրովի բարձր ջերմաստիճանի բետոնի սողքի փորձնական արդյունքները և կառուցվում է սողքի կորիզը։ Արտահայտած, բացատրելով սողքի հատկանի կորիզը՝ կախված բետոնի տարիքից, ջերմաստիճանից և լարումներից, գտած են բերվում դեֆորմացիաների և լարումների կապակցությունները՝ հաշվի առնելով ջերմային ազդեցությունը ակնթարթային առաձգական ուղղի և սողքի շափի վրա։ Դիտվում է ամբողջված ծայրերով ձողի լարվածային վիճակի խնդիրը մամանակի ընթացքում փոփոխական բարձր ջերմային դաշտում։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Харламов В. А.* Исследование ползучести жаропорного бетона при высоких температурах. Труды НИИЖБ, 1959, вып. 6.
2. *Задоян М. А.* О ползучести бетонной плиты при высоких температурах. Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, 1961, № 4.
3. *Задоян М. А.* О ползучести цилиндрической трубы при высоких температурах. ДАН Арм. ССР, т. 31, № 1, 1960.
4. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. М.—Л. Гостехиздат, 1952.
5. *Dorn J. E.* Some fundamental experiments on high-temperature creep. Journ. Mech. Pys. Solids, № 2, 1955.
6. *Розенблюм В. И.* Приближенные уравнения ползучести тонкостенных оболочек. ПММ, № 1, 1963.
7. *Александровский С. В.* Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные воздействия (с учетом ползучести). Стройиздат, 1966.
8. *Findley W. N., Lai J. S. Y.* Amodified superposition principle applied to creep of nonlinear viscoelastic material under abrupt changes in state of combined stress. Trans. Soc. Rheol., 1967, vol. 11, № 3.