

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

А. А. МОВСИСЯН, В. Г. САРКИСЯН

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК  
 ОВАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В работе [1] получены общие уравнения определения собственных колебаний цилиндрических оболочек произвольного поперечного сечения, в том числе и складок. В настоящей статье, исходя из этих уравнений, дается решение задачи свободных колебаний цилиндрических оболочек овального сечения замкнутого и открытого профилей.

1. Свободные колебания изгибного типа описываются системой уравнений [2]:

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \zeta - k(\beta) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0; \tag{1.1}$$

$$D \nabla^4 w + k(\beta) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \gamma h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

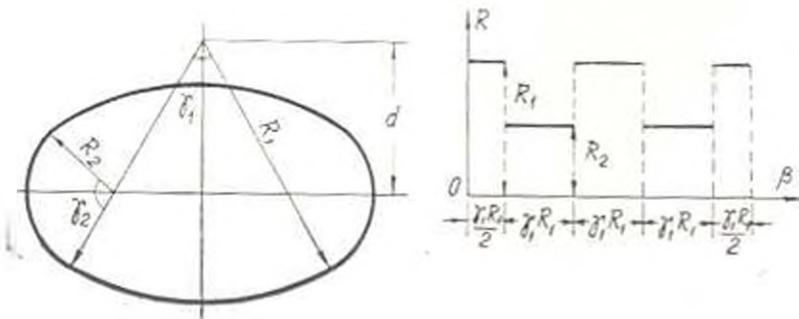


Рис. 1.

В случае овала имеются следующие соотношения (рис. 1):

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, \quad R_2 = R_1 - d \frac{1}{\sin \frac{\gamma_1}{2}}. \tag{1.2}$$

С целью получения коротких формул будем рассматривать овалы частного вида, а именно, когда

$$\gamma_1 R_1 = \gamma_2 R_2. \quad (1.3)$$

Зависимость радиуса кривизны овала  $\left( R(\beta) = \frac{1}{K(\beta)} \right)$  от  $\beta$  представлена на рис. 1.

Решение (1.1) будем искать в виде [1]:

$$v = e^{i\lambda z} \sin \lambda_0 z \sum_{n=0}^{\infty} (z_2^{(n)} \cos \mu_n \beta + z_1^{(n)} \sin \mu_n \beta); \quad (1.4)$$

$$w = e^{i\lambda z} \sin \lambda_0 z \sum_{n=0}^{\infty} (w_1^{(n)} \cos \mu_n \beta + w_2^{(n)} \sin \mu_n \beta);$$

$$\mu_n = \frac{m\pi}{l}; \quad \mu_n = \frac{n\pi}{2\gamma_1 R_1},$$

удовлетворяющем условиям свободного опирания.

Здесь  $l$  — длина цилиндра,  $4\gamma_1 R_1$  — периметр поперечного сечения.

При этом кривизну оболочки представим в виде ряда:

$$K(\beta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \mu_n \beta, \quad (1.5)$$

где для коэффициентов Фурье в соответствии с рис. 1 имеем:

$$a_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right); \quad a_n = \frac{4(1)^{n-1}}{k\pi} \cos \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi}{4} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right). \quad (1.6)$$

Подставим (1.4) и (1.5) в (1.1) и воспользуемся соотношениями вида:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n w_m \cos \mu_n \beta \cos \mu_m \beta &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=n+1}^{\infty} a_{m-n} w_m + \sum_{m=0}^n a_{m-n} w_m + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=0}^n a_{m-n} w_m \right] \cos \mu_n \beta; \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_n w_m \cos \mu_n \beta \sin \mu_m \beta &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=n+1}^{\infty} a_{m-n} w_{m-1} + \sum_{m=0}^n a_{m-n} w_m + \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=0}^n a_{m-n} w_m \right] \sin \mu_n \beta. \end{aligned}$$

Тогда для определения постоянных  $w_n^{(j)}$  и  $z_n^{(j)}$  получаем следующие бесконечные системы однородных алгебраических уравнений:

$$\sum_{m=0}^{\infty} z_m^{(j)} + \frac{E\delta}{2} \lambda_0^2 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} a_{m-n} w_n^{(j)} + \sum_{n=0}^m a_{m-n} w_n^{(j)} - \sum_{n=m+1}^{\infty} a_{n-m} w_n^{(j)} \right] = 0;$$

$$\begin{aligned}
 (D\Delta_{mn}^2 - \gamma h \omega^2) \varphi_m^{(1)} - \frac{1}{2} \gamma_m^2 \left[ \sum_{q=1}^{\infty} a_{n+q} \varphi_q^{(1)} + \sum_{q=0}^{\infty} a_{n-q} \varphi_q^{(1)} + \right. \\
 \left. + \sum_{q=0}^{\infty} a_{n-q} \varphi_q^{(2)} \right] = 0; \quad (1.8) \\
 \Delta_{mn}^2 = (\mu_m^2 + \nu_n^2)^2,
 \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta_{mn}^2 \varphi_m^{(2)}}{\gamma_m^2} - \frac{Eh}{2} \gamma_m^2 \left[ \sum_{q=1}^{\infty} a_{n+q} \varphi_q^{(2)} + \sum_{q=0}^{\infty} a_{n-q} \varphi_q^{(2)} - \sum_{q=1}^{\infty} a_{n-q} \varphi_q^{(2)} \right] = 0; \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned}
 (D\Delta_{mn}^2 - \gamma h \omega^2) \varphi_n^{(2)} - \frac{1}{2} \gamma_n^2 \left[ \sum_{q=1}^{\infty} a_{n+q} \varphi_q^{(2)} + \sum_{q=n}^{\infty} a_{q-n} \varphi_q^{(2)} - \right. \\
 \left. - \sum_{q=1}^{\infty} a_{n-q} \varphi_q^{(2)} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Собственные частоты определяются из условий равенства нулю бесконечных определителей систем (1.8) и (1.9). Можно показать, что эти определители нормальные, следовательно, процесс последовательного определения собственных частот сходится [3]. Для этого достаточно внести поправки:

$$\gamma_m^2 \rightarrow \Delta_{mn}^2 \varphi_m^{(1)} \text{ и } \gamma_n^2 \rightarrow \omega_n^{(1)} \left[ D\Delta_{mn}^2 - \gamma h \omega^2 \right]. \quad (1.10)$$

Тогда, например, (1.9) можно написать в виде

$$\varphi_p \rightarrow \sum_{r=1}^{\infty} C_{pr} \varphi_r = 0, \quad (1.11)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 C_{p, p-2} &= \frac{Eh \gamma_p^2}{2} \frac{a_{p-1} - a_{p+1}}{\Delta_{np} \{ D\Delta_{np}^2 - \gamma h \omega^2 \}}; \\
 C_{p, p-1} &= -\frac{\gamma_p^2}{2} \frac{a_p - a_{p+1}}{\Delta_{np} \{ D\Delta_{np}^2 - \gamma h \omega^2 \}}; \\
 C_{p, p+1} &= \frac{Eh \gamma_p^2}{2} \frac{2a_p - a_{p+1}}{\Delta_{np} \{ D\Delta_{np}^2 - \gamma h \omega^2 \}}; \\
 C_{p, p+2} &= -\frac{\gamma_p^2}{2} \frac{2a_p - a_{p+1}}{\Delta_{np} \{ D\Delta_{np}^2 - \gamma h \omega^2 \}};
 \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$C_{2n} \pm C_{2n-1} = C_{2n-2} = 0,$$

причем,  $p \neq q$ .

Теперь ясно, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} C_{2n}$  на основании (1.6) и (1.12) сходится, следовательно, определитель системы (1.9) нормальный.

В качестве числового примера возьмем овал, один из радиусов кривизны которого  $R_1 = R_2 = 0$ , т. е. овал, составленный из двух полуокружностей и равных с ними по длине прямых отрезков.

Коэффициенты  $a_n$  в этом случае следующие:

$$a_0 = \frac{1}{2R}; \quad a_1 = -\frac{2}{-R}; \quad a_2 = \frac{2}{3-R}; \quad a_3 = \frac{2}{5-R} \quad \text{и т. д.}$$

Каждая из систем (1.8) и (1.9) распадается на четные и нечетные подсистемы. В табл. 1 приводятся значения коэффициента частоты  $\mu = \omega l / \sqrt{E}$  для  $n=1$  и  $n=2$  для овалов с  $\beta = 10^{-1}$  и  $\beta = 0,3$ . Были подсчитаны определители второго и третьего порядка, результаты которых практически совпадают.

Таблица 1

	$\beta$	0,5	0,25	0,1
$\mu$ овал	0,2184	0,3702	1,9901	11,30
$\mu$ круг	0,6283	0,887	1,959	11,56

Для сравнения в третьей строке табл. 1 приведены значения наименьшей частоты кругового цилиндра. Небезынтересен следующий факт. Наименьшая частота для овалового сечения при  $\beta = 1$  получается из четной подсистемы ( $n = 2p$ ) системы (1.8), а остальные — из нечетной. Наименьшая же частота для кругового сечения при  $\beta = 1$  получается, когда количество поперечных оболочек равно двум, а при других  $\beta$  количество оболочек равно единице.

Из таблицы видно, как и следовало ожидать, что при больших  $\beta$  (короткие оболочки) частота оболочек кругового сечения намного больше частоты оболочек овалового сечения и с уменьшением  $\beta$  они практически приравняются.

2°. В случае, когда имеется цилиндрическая панель со свободно опорными кромками, решение (1.4) имеет вид:

$$w = e^{-\mu z} \sin \mu z \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin n \theta, \quad (2.1)$$

$$w = e^{i\omega t} \sin i_m \alpha \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin i_n \beta,$$

где  $i_n = \frac{n\pi}{\beta_0}$ ;  $\beta_0$  — длина дуги поперечного сечения.

Рассмотрим овал с характеристиками:

$$R(\beta) = \begin{cases} R_2 & 0 \leq \beta \leq b \\ R_1 & b < \beta < a + \beta \\ R_2 & a + b \leq \beta \leq a + 2b; \quad \beta_0 = a + 2b. \end{cases} \quad (2.2)$$

Тогда кривизну оболочки можно представить в виде:

$$K(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos i_k \beta; \quad (2.3)$$

$$a_n = \frac{1}{\beta_0} \left( \frac{2b}{R_2} + \frac{a}{R_1} \right); \quad a_n = \frac{4}{k\pi} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \cos \frac{k\pi}{2} \sin \frac{k\pi a}{2\beta_0}.$$

Подставляя (2.1) и (2.3) и (1.4), после некоторых преобразований для  $\varphi_n$  и  $w_n$  получаем систему, аналогичную (1.9). Только надо учесть, что  $a_n$  и  $i_n$  здесь имеют другие значения.

Аналогичным образом, как и в предыдущем пункте, можно доказать нормальность определителя полученной системы.

Результаты вычислений для коэффициента частоты  $\mu$  при некоторых значениях  $\beta$  [ $\beta = (a + 2b)l$ ,  $a = 4b$ ] приведены в табл. 2. При этом принято:  $h/l = 10$ ;  $R_2 = 1$ ;  $\gamma = 0,3$ .

Таблица 2

$l$	1	0,5	0,25	0,1
$\mu$	0,1821	0,4889	1,3440	11,42

Причем, наименьшие частоты получаются из подсистемы с нечетными  $i_n$  и  $w_n$ , полученной в данном пункте из бесконечной системы.

Институт математики и механики

АН Арм. ССР

Арм.НИИ стройматериалов

и сооружений

Получено 27.XII.1970.

Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՅԱՆ, Վ. Գ. ՏԱՐԿԻՅԱՆ

ՕՐԾԱՆՈՒՄԻ ԿՏՐՈՒՄԵՐՈՒ ԳՈՒՆԱՅԻՆ ԲՈՂԱՆԻՔԵՐԻ ՏՄՏՆՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ս. Վ. Փ. և Փ. Ն. Ի

Ազատ Հանրապետության կառավարության կողմից հրատարակվող Քաղաքային Բաղանիշների օրգանիզմի համախոսվածների պրոցեսը բերվում է (1.11) համապետ հանրա-

Հաշվական համաարտումների տնվերը սխտեմի լուծմանը: Տույց է տրվում, որ սխտեմի գործակիցներից կազմված դետերմինանտը նորմալ է: Գրոված են իվային օրինակներ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мовсисян А. А.* Колесания цилиндрической оболочки произвольного сечения. «Известия АН Арм. ССР. Механика», т. XXI, № 5-6, 1968.
2. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат, 1949.
3. *Канторович А. В. и Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.