ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտ. սերիա XXIV, № 1, 1971 Серия техн. наук

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Вл. А. АМБАРЦУМЯН

О ПЕРИОДАХ СВОБОДНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ КАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ

Точный расчет каркасных зданий на восприятие сейсмических сил в значительной степени зависит от правильного определения их динамических характеристик, в частности от частоты (периода) свободных колебаний. Определение частот свободных колебаний каркасных зданий связано с трудоемкими вычислениями собственных значений квадратных матриц и решением систем алгебраических уравнений высших порядков. В работе [1] получена компактная формула для определения периодов колебаний каркасных зданий в зависимости от этажности при упругих линейных колебаниях. Цель настоящей работы—определить аналогичную зависимость с учетом нелинейности колебаний.

Свободные линейные колебания каркасных зданий при абсолютно жестких ригелях (без учета затухания) описываются дифференциальными уравнениями вида [2]:

$$\sum_{k=1}^{s} m_k \ddot{y}_k + a_s (y_s - y_{s+1}) = 0, \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \tag{1}$$

где m_k — масса, сосредоточенная в $(n-k+1)$-ом этаже;

a_s — жесткость $(n-s+1)$-го этажа;

y_s — перемещение $(n-s+1)$-го этажа.

Как видно из (1), восстанавливающая сила $\bar{R}_s(y_s - y_{s+1}) = a_s(y_s - y_{s+1})$ изменяется линейно. Для материалов, применяемых в строительных конструкциях, характерна так называемая „мягкая характеристика" восстанавливающей силы [3], при которой производная $R_s(y_s - y_{s+1})$ убывает с ростом деформаций. Диаграммы строительных материалов при динамических процессах характеризуются различными законами нагрузки и разгрузки. При нагрузке восстанавливающая сила подчиняется нелинейному закону, а при разгрузке—линейному. Для решения задачи исходим из уравнений упруго-нелинейных колебаний. Как будет показано, используя значения периодов упруго-нелинейных колебаний, можно найти периоды колебаний при гистерезисной схеме деформирования. Подставляя в (1) вместо линейной восстанавливающей силы нелинейную в виде $R_s(y_s - y_{s+1}) = a_s[(y_s - y_{s+1}) - \varepsilon (y_s - y_{s+1})^3]$, получим уравнения упруго-нелинейных колебаний:

$$\sum_{k=1}^{s} m_k \ddot{y}_k + a_s[(y_s - y_{s+1}) - \varepsilon_s (y_s - y_{s+1})^3] = 0, \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \qquad (2)$$

где ε_s — малый положительный параметр, характеризующий нелинейность деформации $(n - s + 1)$-го этажа. По результатам работы [4] для простой и консольной железобетонных балок коэффициент нелинейности ε соответственно имеет значения: $0{,}06\ \text{см}^{-2}$ и $0{,}17\ \text{см}^{-2}$. В многоярусной раме нижние и верхние этажи сжаты в разной степени. Это означает, что в уравнениях (2) значение ε_s для нижних этажей должно быть больше по сравнению с верхними. Однако в дальнейшем влиянием нормальных сил пренебрегаем и принимаем

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots = \varepsilon_s = \varepsilon.$$

Исходя из физических представлений, уравнениями (2) можно воспользоваться только для таких значений $(y_s - y_{s+1})$, при которых восстанавливающая сила по абсолютной величине возрастает. Из условия

$$R'_s(y_s - y_{s+1}) = a_s[1 - 3\varepsilon (y_s - y_{s+1})^2] > 0$$

находим, что

$$\varepsilon < \frac{1}{3(y_s - y_{s+1})^2_{max}}. \qquad (3)$$

Для нахождения частоты (периода) нелинейной системы, описываемой уравнениями (2), воспользуемся асимптотическим методом Крылова-Боголюбова [5]. Общее решение уравнений (2) ищем в виде разложения:

$$y_s = C_s^{(1)} Y \cos(\omega_1^{(1)} t + \theta) + \varepsilon U_s^{(1)}(Y, \omega_1^{(1)} t + \theta) + \varepsilon^2 U_s^{(2)}(Y, \omega_1^{(1)} t + \theta) + \cdots \qquad (4)$$

где Y — максимальное перемещение свободного конца;

$C_s^{(1)}$ — частные решения линейной системы уравнений (1);

$\omega_1^{(1)}$ — круговая частота основной формы линейных колебаний;

$U_s^{(1)}$, $U_s^{(2)}$ — периодические функции угла $\psi = \omega_1^{(1)} t + \theta$ с периодом 2π.

Величины Y и ψ как функции времени определяются дифференциальными уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \varepsilon A_1(Y) + \varepsilon^2 A_2(Y) + \varepsilon^3 \cdots \\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_1^{(1)} + \varepsilon B_1(Y) + \varepsilon^2 B_2(Y) + \varepsilon^3 \cdots \end{aligned}\right|$$

В качестве первого приближения принимаем:

$$y_s = C_s^{(1)} Y \cos\psi, \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \qquad (5)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \varepsilon A_1(Y) \\ \omega(Y) = \frac{d\psi}{dt} &= \omega_s^{(1)} + \varepsilon B_1(Y) \end{aligned}\right| \qquad (6)$$

$\omega(Y)$ — искомая частота нелинейных колебаний.
Для нахождения $B_1(Y)$ воспользуемся одним из уравнений гармонического баланса [5]

$$\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{n} C_r^{(1)} \left\{ \sum_{k=1}^{s} m_k \ddot{y}_k + a_s (y_s - y_{s+1}) - a_s \varepsilon (y_s - y_{s+1})^3 \right\} \cos\psi \, d\psi = 0. \qquad (7)$$

$$(s = 1, 2 \cdots n)$$

Дифференцируя (5) с учетом (6), с точностью до величин первого порядка малости находим:

$$\ddot{y}_s = C_s^{(1)} [-2\varepsilon\omega_s^{(1)} \sin\psi\, A_1(Y) - Y\omega_s^{(1)2} \cos\psi - 2\varepsilon Y \omega_s^{(1)} \cos\psi\, B_1(Y)]. \qquad (8)$$

Подставляя (5) и (8) в уравнения (7), получим:

$$\int_0^{2\pi} \sum_{r=1}^{n} C_r^{(1)} \left\{ \sum_{k=1}^{s} - m_k C_k^{(1)} [2\varepsilon\omega_s^{(1)} \sin\psi\, A_1(Y) + Y\omega_s^{(1)2} \cos\psi + \right.$$

$$+ 2\varepsilon Y \omega_s^{(1)} \cos\psi\, B_1(Y)] + a_s Y \cos\psi (C_s^{(1)} - C_{s+1}^{(1)}) -$$

$$\left. - \varepsilon a_s Y^3 \cos^3\psi (C_s^{(1)} - C_{s+1}^{(1)})^3 \right\} \cos\psi \, d\psi = 0. \qquad (9)$$

После интегрирования и преобразований получим:

$$-2Y\omega_s^{(1)} \varepsilon B_1(Y) \sum_{r,k=1}^{n,s} m_k C_r^{(1)} C_k^{(1)} + Y \sum_{r,k=1}^{n,s} C_r^{(1)} [-m_k \omega_s^{(1)2} C_k^{(1)} +$$

$$+ a_s (C_s^{(1)} - C_{s+1}^{(1)})] = \frac{3}{4} \varepsilon Y^3 \sum_{r,s=1}^{n} a_s C_r^{(1)} (C_s^{(1)} - C_{s+1}^{(1)})^3. \quad (s = 1, 2, \cdots, n) \qquad (10)$$

Принимаем, что все сосредоточенные массы равны, а жесткость по всем этажам постоянна ($a_1 = a_2 = \cdots = a$; $m_1 = m_2 = \cdots = m$).
Имея ввиду, что

$$\sum_{r,k=1}^{n,s} - m\omega_n^{(1)2} C_r^{(1)} + a (C_s^{(1)} - C_{s+1}^{(1)}) = 0 \quad (s = 1, 2 \cdots n)$$

и обозначая

$$\sum_{r,k=1}^{n,s} C_r^{(1)} C_k^{(1)} = M_1^{(s)} \text{ и } \sum_{r,s=1}^{n} C_r^{(1)} (C_s^{(1)} - C_{s+1}^{(1)})^3 = \Delta_1^{(s)},$$

получим

$$\varepsilon B_1 = -\frac{3}{8}\frac{\varepsilon Y^2}{\omega_{\text{л}}^{(1)}}\frac{a}{m}\frac{\Delta_1^{(n)}}{M_1^{(n)}}. \tag{11}$$

В работе [1] приведены значения $C_s^{(1)}$ и $\lambda_1 = \omega_{\text{л}}^{(1)2}\cdot\dfrac{m}{a}$ для $n = 2 \div 20$.

Используя эти данные и вычисляя $\Delta_1^{(n)}$ и $M_1^{(n)}$, получим εB_1. Подставляя εB_1 во второе уравнение системы (6), получим значение частоты нелинейных колебаний $\omega(Y)$ в первом приближении. Вычисления проводились для $n = 2 \div 10$; 15; 20 этажей. Полученные значения $M_1^{(n)}$, $\Delta_1^{(n)}$ и $\omega(Y)$ приведены в таблице 1.

Таблица 1

n	$M_1^{(n)}$	$\Delta_1^{(n)}$	$\omega(Y)/\omega_{\text{л}}^{(1)}$
1	1	1	$1-0{,}375\ \varepsilon Y^2$
2	4,235	0,869	$1-0{,}109\ \varepsilon Y^2$
3	11,328	0,316	$1-0{,}0528\ \varepsilon Y^2$
4	24,089	0,247	$1-0{,}0317\ \varepsilon Y^2$
5	43,542	0,197	$1-0{,}0209\ \varepsilon Y^2$
6	71,373	0,164	$1-0{,}01479\ \varepsilon Y^2$
7	109,336	0,141	$1-0{,}01107\ \varepsilon Y^2$
8	158,886	0,123	$1-0{,}00912\ \varepsilon Y^2$
9	221,977	0,111	$1-0{,}00687\ \varepsilon Y^2$
10	299,713	0,100	$1-0{,}00562\ \varepsilon Y^2$
15	961,594	0,068	$1-0{,}00256\ \varepsilon Y^2$
20	2224,004	0,051	$1-0{,}00147\ \varepsilon Y^2$

Решение уравнений (2) во втором приближении имеет вид:

$$y_s = C_s^{(1)} Y \cos\psi + \varepsilon U_s^{(1)}, \quad (s = 1,\ 2 \cdots n) \tag{12}$$

где Y и ψ определяются из уравнений второго приближения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \varepsilon A_1(Y) + \varepsilon^2 A_2(Y),\\ \frac{d\psi}{dt} &= \omega_{\text{л}}^{(1)} + \varepsilon B_1(Y) + \varepsilon^2 B_2(Y). \end{aligned}\right| \tag{13}$$

Значение $U_s^{(1)}$ в уравнении (12) находим как амплитуду вынужденных колебаний, возбуждаемых в системе (1) силами $a\varepsilon(y_s - y_{s-1})^3$, в которых y_s и y_{s-1} синусоидальные:

$$U_s^{(1)} = \sum_{j=1}^{n} C_s^{(j)} \frac{\sum\limits_{p=1}^{n} f_p^{(0)} C_p^{(j)}}{mM_j\omega_j^2} + \sum_{j=2}^{n} C_s^{(j)} \frac{\sum\limits_{p=1}^{n} (f_p^{(1)}\cos\psi + g_p^{(1)}\sin\psi)\, C_p^{(j)}}{mM_j(\omega_j^2 - \omega_{\text{л}}^{(1)2})} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_s^{(j)} \frac{\sum\limits_{p=1}^{n} (f_p^{(i)}\cos i\psi + g_p^{(i)}\sin i\psi)\, C_p^{(j)}}{mM_j(\omega_j^2 - i^2\omega_{\text{л}}^{(1)2})}, \tag{14}$$

где

$$\sum_{r,\,k=1}^{n} C_r^{(j)} C_k^{(s)} = M_j \quad (s,\ j = 1,\ 2 \cdots n),$$

$f_p^{(1)}$ и $g_p^{(1)}$ — коэффициенты разложения функции $a\,(y_p - y_{p+1})^3$ в ряд Фурье. При вычислении $U^{(1)}$ в сумме третьего слагаемого было учтено три члена. Дифференцируя (12) с учетом (13) с точностью до величин второго порядка малости включительно и подставляя y_s и $\dot{y}_s$ в (7), находим $B_s(Y)$. Что подставляя во второе уравнение системы (13) находим значение $\omega(Y)$ с учетом двух приближений. Значения $B_1(Y)$ вычислены для $n = 1, 2, 3$ этажей. Значения частот $\omega(Y)$ с учетом двух приближений имеют вид:

$$\text{при } n = 1 \quad \omega(Y) = \omega_1^{(1)}(1 - 0{,}375\,\varepsilon\, Y^2 - 0{,}058\,\varepsilon^2\, Y^4);$$

$$\text{при } n = 2 \quad \omega(Y) = \omega_1^{(1)}(1 - 0{,}109\,\varepsilon\, Y^2 - 0{,}0039\,\varepsilon^2\, Y^4);$$

$$\text{при } n = 3 \quad \omega(Y) = \omega_1^{(1)}(1 - 0{,}058\,\varepsilon\, Y^2 - 0{,}00084\,\varepsilon^2\, Y^4).$$

Для систем со степенями свободы более трех второе приближение не произведено из-за громоздкости вычислений, кроме того, как видно из табл. 2, при принимаемом интервале изменения коэффициента нелинейности ε первое приближение дает результаты с достаточной для практических целей точностью.

Таблица 2

n	$\omega(Y)/\omega_1^{(1)}$ (I приближение)		$\omega(Y)/\omega_1^{(1)}$ (II приближение)	
	$\varepsilon = 0{,}16$	$\varepsilon = 0{,}33$	$\varepsilon = 0{,}16$	$\varepsilon = 0{,}33$
1	0,9398	0,8763	0,9384	0,8700
2	0,9302	0,8562	0,9286	0,8501
3	0,9239	0,8432	0,9222	0,8362
4	0,9188	0,8327	—	—
5	0,9164	0,8276	—	—
6	0,9147	0,8242	—	—
7	0,9137	0,8222	—	—
8	0,9124	0,8195	—	—
9	0,9109	0,8164	—	—
10	0,9100	0,8146	—	—
15	0,9078	0,8100	—	—
20	0,9060	0,8060	—	—

О количественном изменении частоты нелинейных колебаний $\omega(Y)$ в зависимости от этажности и от коэффициента нелинейности можно судить по данным табл. 2, где для простоты принято $(y_s - y_{s+1})_{max} = 1$. Из условия (3) получается, что $\varepsilon = 0{,}33$. Для сравнения влияния этажности на величину $\omega(Y)/\omega_1^{(1)}$ в первом приближении принимаем, что $Y = n\,(y_s - y_{s+1})_{max}$ [1].

Как видно из табл. 2, с увеличением этажности уменьшается отношение $\omega(Y)/\omega_л^{(1)}$ и разница между частотами нелинейных и линейных колебаний более существенна при больших ε. Обработка данных табл. 1 показала, что значения $\omega(Y)/\omega_л^{(1)}$ хорошо аппроксимируются функцией:

$$\omega(Y)/\omega_л^{(1)} = 1 - 0{,}375\, n^{-1{,}84}\, \varepsilon\, Y^2,$$

а для отношения периодов колебаний $T(Y)/T_л^{(1)}$ с точностью ε будем иметь:

$$T(Y)/T_л^{(1)} = 1 + 0{,}375\, n^{-1{,}84}\, \varepsilon\, Y^2. \qquad (15)$$

Подставляя в (15) вместо $T_л^{(1)}$ его значение, приведенное в работе [1], получим аналогичную формулу для определения периода упруго-нелинейных колебаний:

$$T(Y) = 2\pi\,(0{,}367 + 0{,}633\, n)\sqrt{\frac{m}{a}}\,(1 + 0{,}375\, n^{-1{,}84}\, \varepsilon\, Y^2).$$

Теперь рассмотрим случай, когда восстанавливающая сила при нагрузке подчиняется нелинейному закону

$$R_s = a\,[(y_s - y_{s-1}) - \varepsilon\,(y_s - y_{s-1})^3],$$

а разгрузка происходит линейно. Угол наклона линии разгрузки с осью $(y_s - y_{s-1})$ равен $\alpha = \operatorname{arc\,tg} a$.
Время t_1, в течение которого восстанавливающая сила изменяется от нуля до R_s^{max}, равно:

$$t_1 = \frac{1}{4}\, T(Y).$$

Время разгрузки t_2 (независимо от значения Y) равно:

$$t_2 = \frac{1}{4}\, T_л^{(1)}.$$

Для полупериода гистерезисной системы имеем:

$$\frac{1}{2}\, T_{гис} = t_1 + t_2 = \frac{1}{4}\,[T(Y) + T_л^{(1)}]. \qquad (16)$$

Используя (15), получим формулу для определения периода гистерезисных колебаний:

$$T_{гис} = T_л^{(1)}\left[1 + \frac{1}{2}\, 0{,}375\, n^{-1{,}84}\, \varepsilon\, Y^2\right]. \qquad (17)$$

Рассмотрим важный с практической точки зрения случай, когда угол наклона линии разгрузки β меньше значения $\alpha = \operatorname{arc\,tg} a$. Отметим, что значения $T(Y)$ первого приближения, то есть (15), можно получить также эквивалентной линеаризацией уравнений упруго-нелинейных колебаний [5]. Линеаризованные уравнения (2) при $a_1 = a_2 = \cdots = a$; $m_1 = m_2 = \cdots m$ имеют вид:

$$\sum_{k=1}^{n} m\ddot{y}_k + a_s(y_s - y_{s+1}) = 0, \quad (s = 1, 2, \cdots, n)$$

где a_s — эквивалентная жесткость этажа, определяемая выражением:

$$a_s = a\left[1 - \frac{3}{4}\varepsilon Y^2 \frac{\sum\limits_{s=1}^{n}(C_s^{(1)} - C_{s+1}^{(1)})^4}{\sum\limits_{s=1}^{n}(C_s^{(1)} - C_{s+1}^{(1)})}\right].$$

Угол наклона (γ) линии $R_s = a_s(y_s - y_{s+1})$ с осью $(y_s - y_{s+1})$ равен: $\gamma = \operatorname{arc\,tg} a_s$. Из (16) нетрудно убедиться, что если $\gamma < \theta <$ [illegible], то периоды упруго-нелинейной и гистерезисной систем будут близкими. При $\theta = \gamma$ периоды обоих систем оказываются равными. В случае $\theta < \gamma$ период упруго-нелинейной системы будет меньше периода гистерезисной системы.

В заключение отметим, что определение периода колебаний каркасных зданий с учетом нелинейности деформаций даст возможность выявить их действительную несущую способность при сейсмических воздействиях.

Армянский НИИ
стройматериалов и сооружений

Поступило 19.VII.1970.

Վ. Ա. ՀԱՄԲԱՐՁՈՒՄՅԱՆ

ԿԱՐԿԱՍԱՅԻՆ ՇԵՆՔԵՐԻ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՊԱՐԲԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է բացարձակ կոշտ պարդունակներով կարկասային շենքերի տատանումների պարբերությունները՝ վերականգնող ուժի և տեղափոխության ոչ-գծային կախման դեպքում։ Ստացված է բանաձև ոչ-գծային տատանումների պարբերությունների որոշման համար՝ կախված ոչ-գծայնության աստիճանից և հարկայնությունից։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гороян Т. А., Хачиян Э. Е.* К изучению сейсмостойкости железобетонных каркасных зданий повышенной этажности. Доклады Всесоюзного совещания по сейсмостойкому строительству в Алма-Ате. Ереван, 1967.
2. *Хачиян Э. Е.* Упруго-пластический расчет систем со многими степенями свободы на сейсмостойкость. Научные сообщения АИСМ, вып. 7. Ереван, 1966.
3. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М., 1961.
4. *Мурусидзе Р. Х.* Экспериментальное исследование нелинейности деформации при колебаниях железобетонных элементов. Сб. „Сейсмостойкость сооружений", изд. „Мецниереба", Тбилиси, 1965.
5. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., 1958.