

Т. А. ГОРОЯН, Э. Е. ХАЧИЯН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПЕРИОДОВ И ФОРМ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ МНОГОЭТАЖНЫХ КАРКАСНЫХ ЗДАНИЙ

Определение периодов и форм свободных колебаний многоэтажных зданий сопряжено со значительными трудностями, связанными с вычислением определителей высокого порядка и решением алгебраических уравнений со многими неизвестными. При анализе частотных уравнений каркасных зданий с абсолютно жесткими ригелями при равнораспределенных массах (m) и жесткостях (a), нами в [1] было обнаружено линейная зависимость периодов свободных колебаний от этажности (n) и для определения периодов первых трех типов свободных колебаний зданий высотой до 20 этажей предложена формула:

$$T_r = 2\pi (A_r + nB_r) \sqrt{m/a}, \quad (1)$$

где A_r и B_r — безразмерные коэффициенты и соответственно имеют значения: для I тона — 0,367 и 0,633; для II тона — 0,160 и 0,210; для III тона — 0,118 и 0,126.

Далее, в [2] было показано, что при $n > 5$ влиянием неравенства поэтажных масс в пределах 20–30% можно пренебречь и периоды и формы колебаний определить как для систем с равными массами на всех этажах. При этом более точные результаты получаются, когда в (1) за величину поэтажной массы принимается среднее арифметическое всех масс системы.

В продолжение этих исследований, в данной статье рассматриваются свободные колебания зданий, у которых жесткость первого этажа отлична от равных между собой жесткостей остальных этажей и жесткости ригелей являются конечными величинами.

1. Здания с „гибким“ („жестким“) первым этажом при абсолютно жестких ригелях

На практике, по ряду причин, жесткость первого этажа бывает отличной от жесткостей остальных этажей, причем, она может быть отклонена как в меньшую, так и в большую сторону. Представляя, как и в [1], динамическую расчетную схему здания в виде несомого консольного бруса, несущего n сосредоточенных масс (рис. 1), дифференциальные уравнения движения масс имеют вид:

$$m_k \ddot{y}_k + a_k (y_k - y_{k-1}) - a_{k-1} (y_{k+1} - y_k) = 0. \quad (2)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

Частным интегралом системы (2) является

$$y_k = C_k \sin pt$$

и для определения неизвестных амплитуд C_k получается система однородных алгебраических уравнений:

$$-m_k p^2 C_k + a_k (C_k - C_{k-1}) - a_{k+1} (C_{k+1} - C_k) = 0. \quad (3)$$

$$(k = 1, 2, \dots, n)$$

где p — круговая частота свободных колебаний; m_k — масса, сосредоточенная в уровне перекрытия k -го этажа; a_k — жесткость k -го этажа (сила, вызывающая единичное горизонтальное смещение этажа).

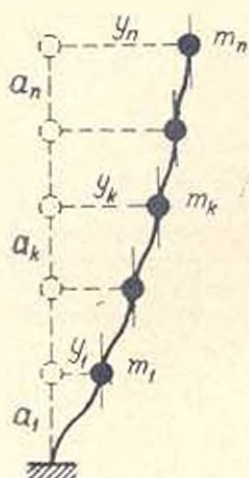


Рис. 1. Расчетная схема здания.

Рассмотрим систему уравнений (3) при различных отношениях жесткости первого этажа a_1 к жесткости остальных этажей $a_2 = a_3 = \dots = a_n = a$. Обозначая $a_1/a = \alpha$, уравнения для определения частот и форм колебаний при равенстве поэтажных масс ($m_1 = m_2 = \dots = m_n = m$) запишутся в виде:

$$\left. \begin{aligned} [a(1 + \alpha) - mp^2] C_1 - aC_2 &= 0 \\ -aC_1 + (2a - mp^2) C_2 - aC_3 &= 0 \\ \dots &\dots \\ -aC_{n-2} + (2a - mp^2) C_{n-1} - aC_n &= 0 \\ -aC_{n-1} - (a - mp^2) C_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Причем, значения $\alpha < 1$ соответствуют зданиям с „гибким“ первым этажом, а $\alpha > 1$ — с „жестким“ первым этажом; случай $\alpha = 1$ будет соответствовать зданиям с постоянной жесткостью по всем этажам, рассмотренным в [1].

Характеристический определитель матрицы системы (4) будет:

$$\Delta_n(\alpha, \lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \alpha - \lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 - \lambda & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \quad (5)$$

где $\lambda = \frac{m}{a} p^2$ — безразмерная частота свободных колебаний.

Для (5) имеет место рекуррентное соотношение:

$$\Delta_n(\alpha, \lambda) = [(1 + \alpha) - \lambda] \Delta_{n-1}(\lambda) - \Delta_{n-2}(\lambda), \quad (n = 2, 3, \dots) \quad (6)$$

где $\Delta_{n-1}(\lambda)$ и $\Delta_{n-2}(\lambda)$ — определители $(n-1)$ -го и $(n-2)$ -го порядка при $\alpha = 1$; причем, $\Delta_n(\lambda) = 1$.

Очевидно, что частотное уравнение будет соответствовать условию: $\Delta_n(\alpha, \lambda) = 0$. Используя (6), для зданий высотой до 20 этажей

развернуты частотные уравнения и на ЭЦВМ с точностью в 10^{-5} вычислены величины первых трех корней при $\alpha = 0,15; 0,30; 0,60; 1,00; 1,50; 2,00; 3,00$.

Результаты вычислений позволяют внести в формулу (1) корректив, связанный с жесткостью первого этажа, и она представляется в более общем виде:

$$T_r = 2\pi \gamma_r (A_r + nB_r) \sqrt{\frac{m}{a}} \quad (7)$$

где $\gamma_r(\alpha, n) = T_r/T_r^* = 1/\lambda_r^*$ — коэффициент, представляющий собой частное периодов свободных колебаний при $a_1 = \alpha a$ и $a_1 = a$ (λ_r^* — корни частотного уравнения при $\alpha = 1$).

Величины коэффициента $\gamma_r(\alpha, n)$ для первых трех тонов колебаний при отмеченных значениях α приведены в табл. 1. При $\alpha = 1$, независимо от тона колебаний и числа этажей, $\gamma_r = 1$. Для промежуточных значений α величину γ_r можно определять по линейной интерполяции. На рис. 2 приведены кривые зависимости $\gamma_r(\alpha, n)$, лежащие в штрихованной области, для 1 тона колебаний при $n = 2 \div 20$. Как видно из табл. 1 и рис. 2, с увеличением этажности $\gamma_r \rightarrow 1$ и для зданий высотой более 10—12 этажей влияние изменения жесткости первого этажа на периоды первых трех тонов свободных колебаний незначительно. Эффект „гибкого“ первого этажа сказывается на зданиях высотой до 10—12 этажей и то, в основном, на периодах первого тона колебаний.

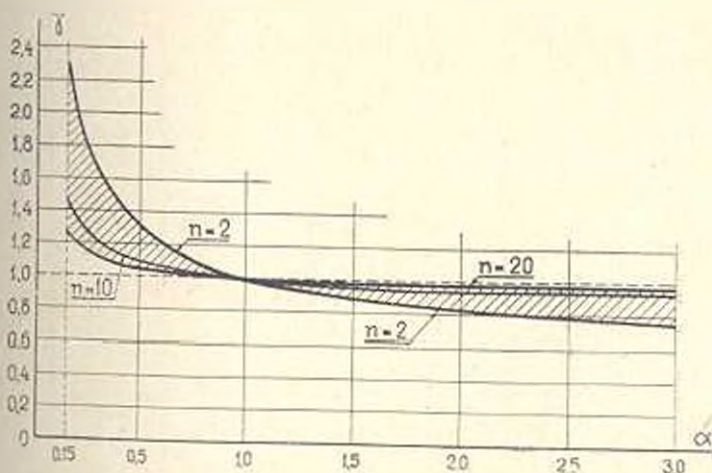


Рис. 2. Кривые зависимости $\gamma_r(\alpha, n)$ для 1 тона колебаний.

Для определения величин коэффициентов r -ой формы колебаний χ_{kr} рассмотрим систему (4) относительно амплитуд C_{kr} . Так как система (4) имеет нетривиальное решение только при $\Delta_r(\alpha, \lambda) = 0$, то для вычисления амплитуд C_{kr} получается рекуррентное соотношение:

Таблица 1

Число этажей	Форма коле- баний	Величины коэффициента γ , при значениях τ					
		0,15	0,30	0,60	1,50	2,00	3,00
2	I	2,30	1,66	1,22	0,87	0,81	0,74
	II	1,22	1,10	1,06	0,93	0,88	0,78
3	I	2,09	1,53	1,17	0,91	0,86	0,81
	II	1,23	1,16	1,08	0,93	0,88	0,83
	III	1,04	1,03	1,02	0,94	0,93	0,85
4	I	1,93	1,45	1,15	0,93	0,90	0,86
	II	1,24	1,18	1,09	0,94	0,90	0,86
	III	1,07	1,06	1,04	0,94	0,92	0,88
5	I	1,79	1,37	1,12	0,94	0,91	0,88
	II	1,25	1,18	1,08	0,94	0,91	0,88
	III	1,08	1,07	1,03	0,94	0,92	0,88
6	I	1,70	1,34	1,10	0,95	0,92	0,90
	II	1,26	1,18	1,08	0,95	0,93	0,90
	III	1,12	1,09	1,05	0,96	0,93	0,91
7	I	1,63	1,29	1,09	0,96	0,93	0,91
	II	1,27	1,18	1,07	0,96	0,94	0,91
	III	1,13	1,12	1,05	0,96	0,94	0,92
8	I	1,57	1,26	1,08	0,96	0,94	0,92
	II	1,26	1,17	1,07	0,96	0,94	0,92
	III	1,13	1,10	1,05	0,97	0,95	0,93
9	I	1,52	1,23	1,07	0,97	0,95	0,93
	II	1,26	1,16	1,05	0,97	0,95	0,93
	III	1,14	1,10	1,05	0,97	0,95	0,93
10	I	1,48	1,21	1,06	0,97	0,95	0,94
	II	1,26	1,10	1,05	0,97	0,96	0,94
	III	1,14	1,10	1,05	0,97	0,96	0,94
11	I	1,44	1,20	1,06	0,97	0,96	0,94
	II	1,25	1,15	1,05	0,97	0,96	0,94
	III	1,14	1,10	1,04	0,97	0,96	0,94
12	I	1,41	1,18	1,05	0,97	0,96	0,95
	II	1,24	1,14	1,05	0,97	0,96	0,95
	III	1,14	1,10	1,04	0,98	0,96	0,95
13	I	1,38	1,17	1,05	0,98	0,96	0,95
	II	1,24	1,14	1,05	0,98	0,96	0,95
	III	1,14	1,10	1,04	0,98	0,96	0,95
14	I	1,36	1,16	1,05	0,98	0,97	0,95
	II	1,23	1,13	1,04	0,98	0,97	0,95
	III	1,14	1,10	1,04	0,98	0,97	0,96
15	I	1,34	1,15	1,04	0,98	0,97	0,96
	II	1,23	1,12	1,04	0,98	0,97	0,96
	III	1,14	1,10	1,04	0,98	0,97	0,96
16	I	1,32	1,14	1,04	0,98	0,97	0,96
	II	1,22	1,12	1,04	0,98	0,97	0,96
	III	1,14	1,09	1,04	0,98	0,97	0,96

$$C_{kr} = \frac{\Delta_{n-k}(\lambda_r)}{\Delta_{n-1}(\lambda_r)} C_{1r}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (8)$$

где определители $\Delta_{n-k}(\lambda_r)$ и $\Delta_{n-1}(\lambda_r)$ вычисляются по (5) при $\alpha = 1$ и значениях корней частотного уравнения $\Delta_n(\alpha, \lambda) = 0$; причем, $\Delta_0(\lambda_r) = 1$. Соответственно, коэффициенты r -ой формы свободных колебаний выражаются формулой:

$$\gamma_{kr} = \Delta_{n-k}(\lambda_r) \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_{n-i}(\lambda_r)}{\sum_{i=1}^n |\Delta_{n-i}(\lambda_r)|^2}, \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (9)$$

Используя найденные значения корней частотных уравнений, по выражению (9) вычислены γ_{kr} для первых трех форм свободных колебаний систем со степенями свободы до $n = 20$ при рассмотренных значениях отношения жесткостей первого и типового этажей*. Анализ результатов вычислений показывает, что при одной и той же этажности формы колебаний в сильной степени зависят от значения параметра λ . На рис. 3 приведены формы колебаний системы с 8-ью сте-

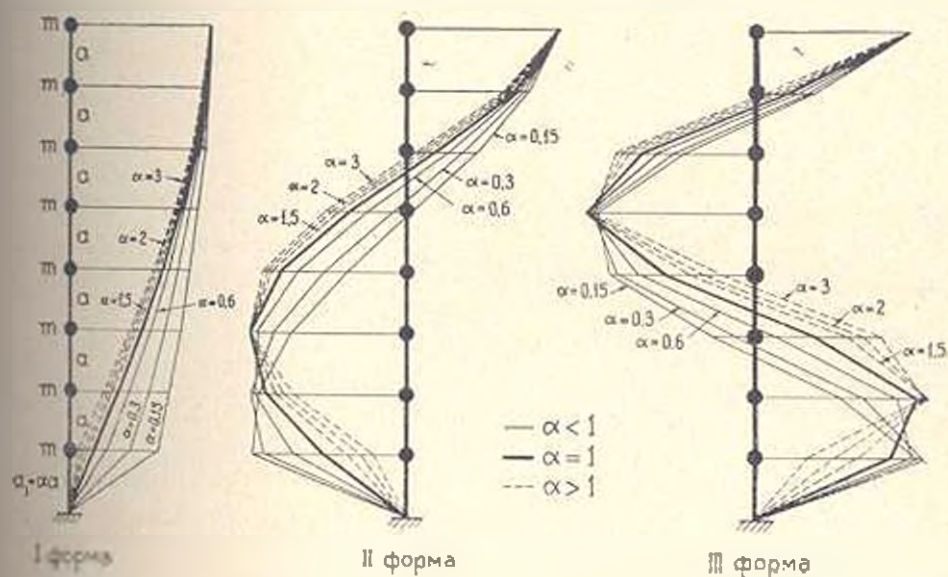


Рис. 3. Формы колебаний 8-этажного здания при различных значениях λ .

пеньями свободы, и, как видно, изменение λ сильнее сказывается на величине амплитуды колебаний I этажа, которая резко возрастает с уменьшением λ . Увеличение α заметно изменяет форму колебаний высших тонов и приводит к смещению их пучности вверх по высоте здания.

* Результаты вычислений здесь не приводятся ввиду недостатка места. Таблицы значений коэффициентов γ_{kr} будут опубликованы в виде отдельной брошюры.

2. Каркасные здания с гибкими ригелями

Ниже рассматриваются свободные колебания каркасных зданий, у которых жесткости ригелей — конечные величины, сопоставимые с жесткостями стоек, и перекрытия не полностью играют отведенную им роль жестких диафрагм. С целью применения к ним результатов, полученных для зданий с абсолютно жесткими ригелями, вводится понятие о *приведенной жесткости этажа*. Под приведенной жесткостью этажа мы понимаем такую жесткость, которая в предположении абсолютной жесткости перекрытия допускает такую же деформацию сдвига как и для анализируемого случая, когда ригели не жестки. Приведенную жесткость оцениваем по следующей приближенной методике.

Приведенную жесткость i -ой стойки k -го этажа можно представить в виде:

$$\bar{a}_{ki} = \theta_{ki} a_{ki}^*$$

где $\theta_{ki} < 1$ — коэффициент, учитывающий влияние ригелей на жесткость стойки; $a_{ki}^* = 12 E_{ki} I_{ki} / l_k^3$ — жесткость данной стойки при абсолютно жестких ригелях (E_{ki} — модуль упругости материала стойки; I_{ki} — момент инерции сечения стойки в рассматриваемом направлении; l_k — длина стойки).

Следовательно, приведенная жесткость k -го этажа будет:

$$a_k = \sum_{i=1}^q \bar{a}_{ki} = \sum_{i=1}^q \theta_{ki} a_{ki}^* \quad (10)$$

где q — число стоек k -го яруса рамного каркаса.

Для определения величин коэффициента θ_{ki} считаем приемлемым применение формул, предложенных проф. К. Муго [3] и имеющих вид:

а. В общем случае (рис. 4)

$$\theta_{ki} = \frac{\bar{\theta}_{ki}}{2 + \bar{\theta}_{ki}}, \quad \text{где} \quad \bar{\theta}_{ki} = \frac{r_{ki}^{(1)} + r_{ki}^{(2)} + r_{ki}^{(3)} + r_{ki}^{(4)}}{2s_{ki}};$$

б. В случае заделки нижнего конца стойки

$$\theta_{ki} = \frac{0,5 + \bar{\theta}_{ki}}{2 + \bar{\theta}_{ki}}, \quad \text{где} \quad \bar{\theta}_{ki} = \frac{r_{ki}^{(1)} + r_{ki}^{(2)}}{s_{ki}}.$$

Здесь $r_{ki}^{(1)}$, $r_{ki}^{(2)}$, $r_{ki}^{(3)}$, $r_{ki}^{(4)}$ — погонные жесткости ригелей, примыкающих к i -ой стойке k -го этажа, имеющей погонную жесткость s_{ki} .

Тогда периоды свободных колебаний зданий с гибкими ригелями определяются по формуле (7), заменяя в ней жесткость a приведенной жесткостью по выражению (10). Стало быть, введением приведенной жесткости система с гибкими ригелями заменяется динамически эквивалентной системой с абсолютно жесткими ригелями.

Для оценки точности предлагаемого упрощенного способа определения периодов свободных колебаний каркасных зданий с гибкими ригелями произведено сопоставление периодов колебаний четырех-, шести-, восьми- и десятиэтажных железобетонных рам, вычисленных по предлагаемому способу и по точному методу строительной механики.

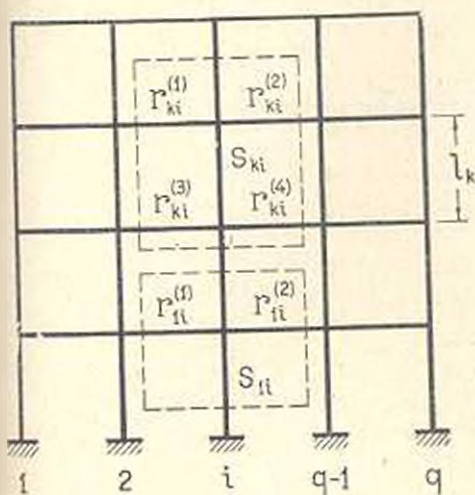


Рис. 4. К определению периодов колебаний систем с гибкими ригелями.

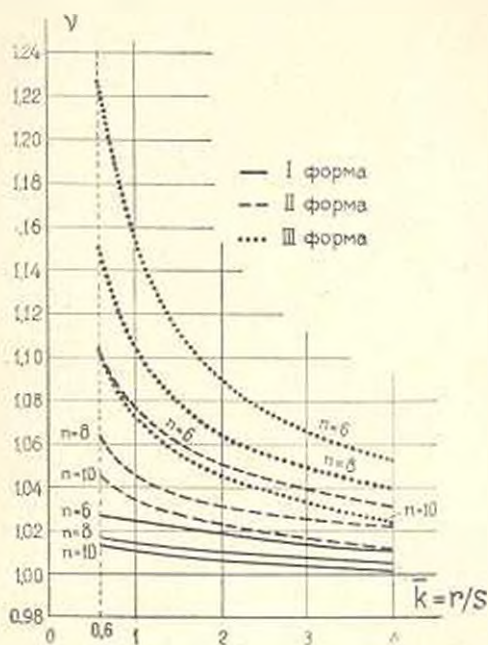


Рис. 5. Кривые зависимости $\nu(n, k)$ для рассмотренных рам.

Исходные расчетные параметры рассмотренных двухпролетных рам следующие: пролеты — $h_1 = h_2 = 6,0$ м; высота ярусов $l_1 = l_2 = \dots = l_n = 3,3$ м; бетон марки 200 ($E_B = 265000$ кГ/см²); погонная жесткость ригелей всех ярусов — $r = 1975$ Тм; то же стоек — $s = 3350$ Тм; массы, сосредоточенные в уровнях ригелей — $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 52$ кГ.сек²/см; суммарная жесткость стоек — $\Sigma EI = 3315 \cdot 10^8$ кГ.см².

Периоды свободных колебаний рам, вычисленные при различных значениях отношения погонных жесткостей ригелей и стоек — $\bar{k} = r/s$, приведены в таблицах 2 и 3.

Результаты сопоставления приведены на рис. 5, где $\nu = T^{(II)}/T^{(I)}$ — отношение периодов, вычисленных по предлагаемому способу и по точному методу, и, как видно, с увеличением числа этажей n и отношения $\bar{k}$ величина ν стремится к единице. Причем, это стремление сильнее проявляется при первой форме колебаний; так, для 10-этажного здания при $\bar{k} = 0,6$ ошибка определения периода составляет 1,2%, а при $\bar{k} = 4$ — 0,1%. Установлено, что предлагаемый способ определения периодов свободных колебаний зданий с гибкими ригелями приемлем

для практических расчетов при этажности более 4, а при отношении погонных жесткостей ригелей и стоек больше 3 периоды колебаний рамных систем можно определять как для систем с абсолютно жесткими ригелями ($k = \infty$).

Таблица 2

Периоды свободных колебания рам,
вычисленные по предлагаемому способу

Число этажей (n)	Форма колеба- ний	$T^{(n)}$ в сек при значениях k				
		0,6	1,0	2,0	3,0	4,0
4	I	0,692	0,599	0,515	0,481	0,462
	II	0,241	0,208	0,183	0,169	0,160
	III	0,153	0,132	0,112	0,104	0,100
6	I	1,016	0,873	0,746	0,694	0,666
	II	0,348	0,298	0,255	0,237	0,227
	III	0,216	0,185	0,157	0,146	0,140
8	I	1,345	1,149	0,977	0,908	0,871
	II	0,456	0,389	0,331	0,308	0,295
	III	0,289	0,240	0,203	0,189	0,181
10	I	1,676	1,428	1,210	1,123	1,076
	II	0,566	0,482	0,408	0,379	0,363
	III	0,346	0,294	0,249	0,231	0,221

Таблица 3

Периоды свободных колебаний рам, вычисленные
по точному методу строительной механики

Число этажей (n)	Форма колеба- ний	$T^{(n)}$ в сек при значениях k					
		0,6	1,0	2,0	3,0	4,0	∞
4	I	0,657	0,573	0,497	0,467	0,452	0,391
	II	0,204	0,183	0,164	0,155	0,152	0,136
	III	0,111	0,105	0,099	0,095	0,094	0,089
6	I	0,990	0,853	0,732	0,685	0,659	0,565
	II	0,316	0,277	0,242	0,228	0,220	0,192
	III	0,176	0,160	0,144	0,137	0,133	0,120
8	I	1,323	1,133	0,967	0,902	0,867	0,739
	II	0,429	0,372	0,321	0,300	0,289	0,249
	III	0,245	0,217	0,191	0,180	0,174	0,153
10	I	1,656	1,413	1,203	1,120	1,075	0,910
	II	0,541	0,466	0,399	0,373	0,359	0,307
	III	0,313	0,274	0,238	0,223	0,216	0,187

Поскольку введением приведенной жесткости система с гибкими ригелями заменяется динамически эквивалентной системой с абсолютно жесткими ригелями, а формы колебаний системы характеризуются

близкими корнями частотного уравнения, независимыми от абсолютных величин поэтажных жесткостей, то вычисленные значения коэффициента η_{kr} могут быть использованы и для систем с гибкими ригелями.

Армянский НИИ

строительных материалов и сооружений

Поступило 15.VI.1970.

Տ. Ա. ԳՆՐՈՅԱՆ, Է. Ն. ԽԱՉԻՅԱՆ

ՔԱՉՄԱՀԱՐԿ ԿԱՐԿԱՍԱՅԻՆ ՇՆՆՔՆԵՐԻ ԱԶԱՏ ՏԱՏԱԿՈՒՄՆԵՐԻ
ՊԱՐՐԵՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՋԵՎՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ու մ

Բացարձակ կոշտ պարզունակներով կարկասային շենքերի համախոթությունների հավասարումների վերլուծության հիման վրա մինչև 20 հարկ բարձրություն ունեցող աշտարակի շենքերի ազատ տատանումների առաջին երեք տոնների պարբերությունները որոշելու համար առաջարկվում է (7) բանաձևը: Ընդ որում, հաշվի է առնվում 1 հարկի «ձկունությունը» («կոշտությունը»): Յուրյց է որված, որ ճաղկի բեռված կոշտություն հասկացության հետ կապված մոտավոր մեթոդով կարելի է բավարար ճշտությամբ իրականացնել պարզունակների ձևափոխության հաշվառքը: Ազատ տատանումների ձևերի պորժուկիցների որոշման համար ստացված է (9) բանաձևը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гороян Т. А., Хачиян Э. Е. К изучению сейсмостойкости железобетонных каркасных зданий повышенной этажности. Доклады Всесоюзного совещания по сейсмостойкому строительству в Алма-Ате. Ереван, 1967.
2. Гороян Т. А. О влиянии поравенства поэтажных масс на периоды и формы свободных колебаний многоэтажных зданий. Известия АН АрмССР (серия ТН)", т XXII, № 1, 1969.
3. Мута К. Анализ сейсмостойкости железобетонных зданий. Сб. «Международная конференция по сейсмостойкому строительству в Сан-Франциско», Госстройиздат, 1961.