ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXIII, № 5, 1970 Серия технических наук

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Ю. А. САРКИСЯН

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ И ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННИКА

В статье представлены две теоремы о пространственном четырехзвенном механизме, основанные на свойствах симметрии. Эти теоремы позволяют путем преобразований получить восьмизвенные и семизвенные рычажные механизмы с пространственным криволинейно-поступательным движением шатуна по траекториям исходного четырехзвенника. Установлена также некоторая совокупность шестизвенных механизмов, точно воспроизводящих функцию положения передаточного пространственного четырехзвенника.

1. О параллелограммной конфигурации в пространственном четырехзвеннике

Теорема. *Точки продольных осей звеньев пространственного четырехзвенника $ABCD$, делящие длины всех звеньев в том же самом отношении так, чтобы пропорциональные отрезки оказались при общей вершине, лежат в одной плоскости, образуя параллелограмм.*

Пусть дан некоторый пространственный четырехзвенник $ABCD$ и согласно условию теоремы найдены точки E, F, E', F' (рис. 1). Введем следующие обозначения: $BE = k$, $EC = l$, $k + l = b$, $AB = a$, $CD = c$. Свяжем со стойкой AD неподвижную систему координат $Axyz$, совместив ось абсцисс Ax с осью вращения кривошипа AB и ориентируя плоскость Axy параллельно оси вращения звена CD. Оси вращения звеньев AB и CD перекрещиваются под углом α.

Пользуясь известными соотношениями деления отрезка в данном отношении, радиус-вектор середины отрезка EE' можно представить в следующем виде:

$$\bar{r}_{O'} = \frac{\bar{r}_E + \bar{r}_{E'}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{r}_B + \frac{k}{l}\bar{r}_C}{1 + \frac{k}{l}} + \bar{r}_D \frac{l}{b}\right) \tag{1}$$

Радиус-вектор середины отрезка FF' определяется следующим равенством:

$$\bar{r}_{O'} = \frac{\bar{r}_F + \bar{r}_{F'}}{2} = \frac{1}{2}\left(\bar{r}_B \frac{l}{b} + \bar{r}_D + \overline{DC}\frac{k}{b}\right). \tag{2}$$

После несложных преобразований можно заметить, что равенства (1) и (2) тождественны и приводятся к виду:

$$\bar{r}_{O'} = \bar{r}_{O''} = \bar{r}_O = \frac{l}{2b}(\bar{r}_B + \bar{r}_D) + \bar{r}_C \frac{k}{b}.$$

Поскольку точки O' и O'' совпадают, то отрезки EE' и FF' в точке пересечения делятся пополам. Итак, получаем, что точки E, E', F, F' лежат в одной плоскости и образуют параллелограмм. К этому же утверждению можно прийти, рассматривая подобие треугольников BCD и ECF', а также BAD и FAE'. В самом деле, отрезки EF' и FE' равны и параллельны, так как точки E, F' и E', F соответственно делят стороны углов BCD и BAD на пропорциональные отрезки в одинаковом отношении.

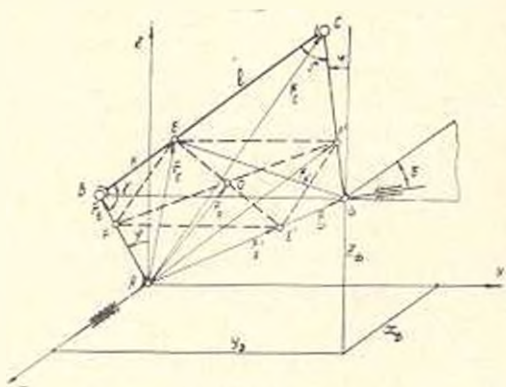

Рис. 1.

В качестве непосредственного следствия рассмотренной теоремы отметим следующее свойство: шатунная кривая точки E пространственного четырехзвенника $ABCD$ и геометрическое место возможных положений центра симметрии O параллелограмма $FEF'E'$ являются подобными кривыми с отношением подобия $E'O : E'E = 1:2$.

Легко убедиться, что и при движении механизма точки F, E, F', E' остаются в одной плоскости, составляя параллелограмм, так как положения их на звеньях не меняются. Число таких плоскостей при различных значениях отношения k/l равно числу точек на отрезке, т. е. бесконечности. Чтобы составить общее уравнение плоскости параллелограмма, достаточно рассмотреть условие компланарности отрезков $E'F$ и $E'F'$ и прямой, соединяющей вершину параллелограмма E' с произвольной точкой данной плоскости, т. е.

$$\begin{vmatrix} x - x_E & y - y_E & z - z_E \\ x_F - x_{E'} & y_F - y_E & z_F - z_{E'} \\ x_{F'} - x_E & y_F - y_{E'} & z_{F'} - z_{E'} \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель по элементам первой строки и преобразуя, получаем искомое уравнение

$$P_1 x + P_2 y + P_3 z + P_4 = 0, \tag{3}$$

где

$$P_1 = (y_F - y_{E'})(z_{F'} - z_{E'}) - (y_{F'} - y_E)(z_F - z_{E'});$$

$$P_2 = (x_{F'} - x_{E'})(z_F - z_{E'}) + x_{E'}(z_{F'} - z_{E'});$$

$$P_3 = -x_{E'}(y_{F'} - y_E) - (x_{F'} - x_{E'})(y_F - y_{E'});$$

$$P_4 = \begin{vmatrix} x_E & y_E & z_{E'} \\ x_F - x_{E'} & y_F - y_{E'} & z_F - z_{E'} \\ x_{F'} - x_E & y_{F'} - y_E & z_{F'} - z_{E'} \end{vmatrix}.$$

Переменные координаты точек F и F' можно выразить через углы вращения φ и ψ звеньев AB и CD при помощи следующих очевидных соотношений:

$$\left.\begin{array}{ll} x_F = 0, & x_{F'} = x_D - \frac{k}{b} c \sin\psi \sin\delta, \\ y_F = -\frac{l}{b} a \sin\varphi, & y_{F'} = y_D - \frac{k}{b} c \sin\psi \cos\delta, \\ z_F = \frac{l}{b} a \cos\varphi, & z_{F'} = z_D - \frac{k}{b} c \cos\psi. \end{array}\right|$$

Используя условие замкнутости контура $ABCD$, можно получить известную зависимость угла повората ψ звена CD от угла поворота звена AB. Координаты x_E, y_E, z_E шатунной точки E также могут быть выражены через входной угол φ. Таким образом, коэффициенты уравнения (3) зависят только от переменной φ и при ее различных значениях оно определяет последовательные позиции движущей плоскости параллелограмма, проходящие через неподвижную точку E'.

Покажем, что при движении механизма разность квадратов диагоналей FF' и EE' найденного параллелограмма остается постоянной. С этой целью выведем некоторые соотношения, связывающие параметры параллелограмма с размерами базисного четырехзвенника. Из треугольников BCD и ABC соответственно имеем:

$$(BD)^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mu; \tag{4}$$

$$(AC)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \tag{5}$$

Далее, из треугольников ECD и ABE соответственно получаем:

$$\cos\mu = \frac{l^2 + c^2 - (x_E - x_D)^2 - (y_E - y_D)^2 - (z_E - z_D)^2}{2lc}; \qquad (6)$$

$$\cos\gamma = \frac{k^2 + a^2 - x_E^2 - y_E^2 - z_E^2}{2ka}. \qquad (7)$$

Определив значения углов μ и γ из соотношений (6), (7) и подставляя их в равенства (4) и (5), находим длины диагоналей BD и AC в зависимости от координат шатунной точки E. Теперь для нахождения сторон параллелограмма достаточно использовать подобие треугольников BCD, ECF' и ABC, FBE:

$$(FE')^2 = (BD)^2 \frac{(AF)^2}{(AB)^2} = (BD)^2 \frac{l^2}{b^2}; \qquad (8)$$

$$(FE)^2 = (AC)^2 \frac{(FB)^2}{(AB)^2} = (AC)^2 \frac{k^2}{b^2}. \qquad (9)$$

С учетом (6) и (7) равенства (4) и (5) принимают вид:

$$(BD)^2 = b^2 + c^2 - \frac{b}{l}(l^2 + c^2 - x_D^2 - y_D^2 - z_D^2 - x_E^2 - y_E^2 -$$

$$- z_E^2 + 2x_E x_D + 2y_E y_D + 2z_E z_D); \qquad (10)$$

$$(AC)^2 = b^2 + a^2 - \frac{b}{k}(k^2 + a^2 - x_E^2 - y_E^2 - z_E^2). \qquad (11)$$

Обозначая $FF' = f$, $EE' = e$ и принимая во внимание соотношения (8) и (9), известное свойство параллелограмма можно представить в следующем виде:

$$f^2 = 2(BD)^2 \frac{l^2}{b^2} + 2(AC)^2 \frac{k^2}{b^2} - e^2. \qquad (12)$$

Подставляя в (12) соотношения (10) и (11), а также формулу

$$e = \left(x_E - \frac{l}{b} x_D\right)^2 + \left(y_E - \frac{l}{b} y_D\right)^2 + \left(z_E - \frac{l}{b} z_D\right)^2, \qquad (13)$$

после преобразований получаем:

$$f^2 = 2\left[l^2 + k^2 + \frac{l^2}{b^2} c^2 + \frac{k^2}{b^2} a^2 - \frac{l^3}{b} - \frac{k^3}{b} - \frac{lc^2}{b} - \frac{ka^2}{b} + \frac{l}{b} \times \right.$$

$$\left. \times (x_D^2 + y_D^2 + z_D^2) \right] - 2\frac{l}{b}(x_D x_E + y_D y_E + z_D z_E) -$$

$$- \frac{l^2}{b^2}(x_D^2 + y_D^2 + z_D^2) + x_E^2 + y_E^2 + z_D^2. \qquad (14)$$

Вычитывая из (14) выражение (13) и обозначая $x_D^2+y_D^2+z_D^2=d^2$, получаем:

$$f^2-e^2=2\Big(l^2+k^2+\frac{l^2}{b^2}c^2+\frac{k^2}{b^2}a^2-\frac{l^2}{b}-\frac{k^2}{b}-\frac{lc^2}{b}-$$
$$-\frac{ka^2}{b}-\frac{l^2}{b^2}d^2+\frac{l}{b}d^2\Big). \qquad (15)$$

Данное свойство может быть выражено также в следующей форме:

$$f\frac{df}{dx_E}=e\frac{de}{dx_E}.$$

Если вершины параллелограмма расположены в серединах длин звеньев четырехзвенника, т. е. при $k=l=b/2$, то выражение (15) значительно упрощается:

$$f^2-e^2=\frac{1}{2}(b^2+d^2-a^2-c^2).$$

Наконец, в частном случае, соответствующем условию $b^2+d^2=a^2+c^2$, получаем, что $f=e$ и параллелограмм превращается в прямоугольник.

2. О замечательном пространственном восьмизвеннике

Теорема. *Пространственный четырехзвенный механизм $ABCD$ и его симметрия $A'B'C'D'$ относительно точки пересечения диагоналей четырехугольника, вершины которого делят длины всех звеньев в одинаковом отношении так, чтобы при любой вершине оказались пропорциональные отрезки, могут быть соединены в одноподвижной системе посредством четырех сферических пар, установленных в вершинах указанного четырехугольника.*

Пусть имеем пространственный четырехзвенник $ABCD$ и найдены точки F, E, F', E', образующие согласно теореме, приведенной в предыдущем параграфе, параллелограмм, диагонали которого пересекаются в точке O (рис. 2, *а*). Следуя рассматриваемой теореме, найдем симметрию $ABCD$ исходного четырехзвенника относительно центра O. Соединив симметричные кинематические цепи $ABCD$ и $A'B'C'D'$ при помощи двух шаровых шарниров в точках E и E' и поставив систему на звено $A'ED'$, получаем двухподвижный восьмизвенник. Теперь присоединим к механизму кинематическую цепь, состоящую из двух звеньев и из трех поступательных пар, которая обеспечивает поступательное движение звена $AE'D$. Присоединенная кинематическая цепь хотя и вводит три условия связи (исключает три возможных вращательных движения звена $AE'D$), но образованная десятизвенная система по существу одноподвижна, поскольку известно*, что если точку E пространственного четырехзвенника $ABCD$, описывающую некоторую ша-

---

* Данное свойство установлено автором в работе, доложенной на семинаре по теории механизмов и машин в Москве 10 марта 1970 г.

тунную кривую $\alpha\alpha$, сделать неподвижной, освободить стойку и обеспечить ее поступательное движение, то любая точка обращенной стойки движется по траектории, симметричной $\alpha\alpha$ относительно середины отрезка, соединяющего данную точку с точкой E. Отсюда следует, что присоединенный четырехзвенник $ABCD$ по существу накладывает только пассивные связи.

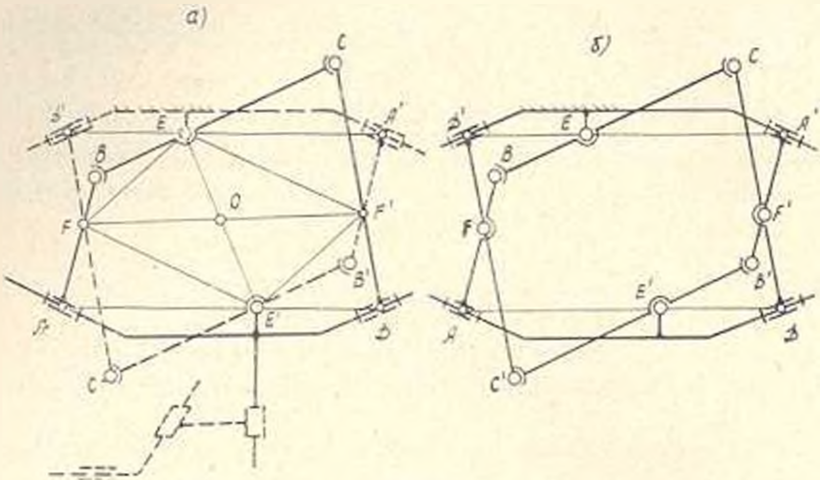

Рис. 2.

Теперь легко показать, что симметрия контуров $ABCD$ и $A'B'C'D'$ при движении механизма не нарушается. В самом деле, так как направления AD и $A'D'$ при движении остаются параллельными, то постоянно соблюдается симметрия противолежащих контуров $BEE'A$ и $B'E'EA'$, а также $CEE'D$ и $C'E'ED'$ с попарно равными сторонами и с общим основанием EE', следовательно, и симметрия кинематических цепей $ABCD$ и $A'B'C'D'$.

Ввиду того, что $EF \parallel E'F'$ и $D'E = E'D$, треугольники EFD' и $E'F'D$ будут симметричны относительно точки O и поэтому будет иметь место условие $FD' = F'D = \text{const}$. Аналогично, рассмотрение равенства и параллельности сторон EF', FE' и $A'E$, AE' треугольников $EA'F'$ и $E'AF$ приводит к условию $A'F' = AF = \text{const}$. В силу полученных двух условий можно утверждать, что, вводя сферические кинематические пары в точках F и F', подвижности механизма не нарушим. Далее, отсоединив двухзвенную кинематическую цепь с поступательными парами, окончательно получаем восьмизвенную одноподвижную систему четырехзвенника $ABCD$ и его симметрии $A'B'C'D'$ (рис. 2, *б*), что и требовалось доказать.

Степень подвижности восьмизвенника равна

$$W = 6 \cdot 7 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = -4,$$

что указывает на наличие в составе механизма пассивных связей.

3. Некоторые преобразования восьмизвенника

Ниже рассматриваются свойства найденного восьмизвенника и преобразования, основанные на этих свойствах. Восьмизвенник может послужить в качестве генератора поступательного движения по четырем различным пространственным шатунным кривым. Действительно, постановка механизма на звено $A'D'$ доставляет поступательное движение шатуна A по исходной траектории точки E четырехзвенника $A'B'C'D'$ со стойкой $A'D'$. Поставив же эту кинематическую цепь последовательно на звенья $A'B'$ и $C'D'$, соответственно обеспечиваем пространственные поступательные движения звеньев AB и CD по шатунным кривым точек F и F' четырехзвенника $ABCD$, описываемых соответственно при неподвижных звеньях $A'B'$ и $C'D'$. Наконец, поставив восьмизвенник на шатун $B'C'$, обеспечиваем поступательное движение продольной оси звена BC по шатунной кривой точки E четырехзвенника $A'B'C'D'$ со стойкой $B'C'$ (возможность поворота шатуна BC вокруг собственной продольной оси не исключена). При постановке восьмизвенника на звенья базисного четырехзвенника получаем пространственные поступательные движения по траекториям, симметричным указанным шатунным кривым.

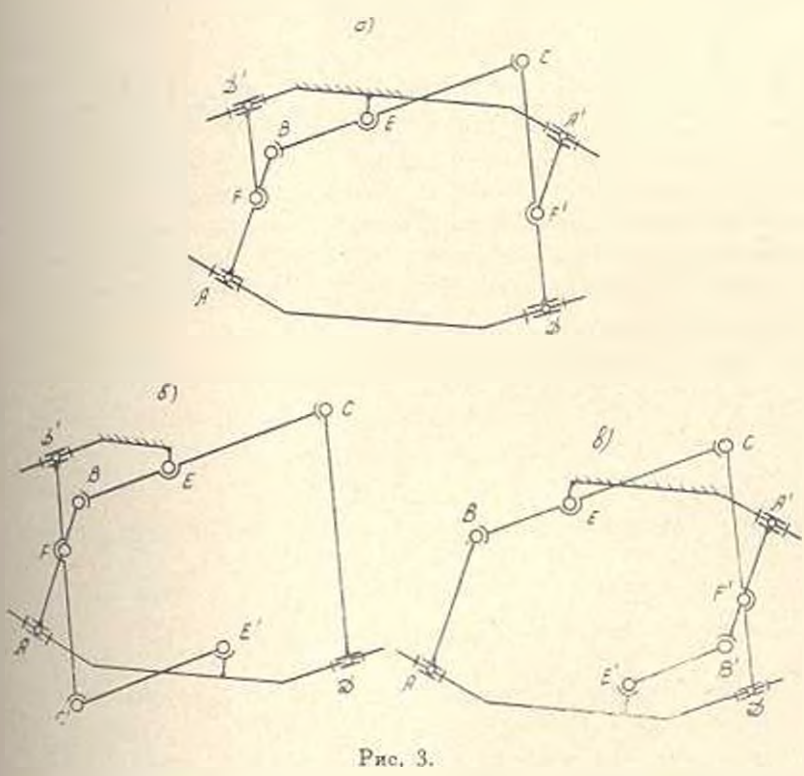

Рис. 3.

Поочередно отсоединив от восьмизвенника звенья $B'C'$, $A'B'$, $C'D'$, получаем семизвенные механизмы, соответственно изображенные на рис. 3, *а*, *б*, *в*. Шатун $AE'D$ в этих механизмах движется поступательно, воспроизводя шатунную кривую точки E четырехзвенника $A'B'C'D'$. Следует отметить, что механизм на рис. 3, *а* содержит пассивную связь и одна из вращательных пар A и D может быть заменена сферической.

В заключении остановимся на преобразовании, которое позволяет получить некоторую совокупность шестизвенных рычажных механизмов, родственных пространственному передаточному четырехзвеннику.

Пусть пространственный четырехзвенный механизм воспроизводит некоторую зависимость $\psi = F(\varphi)$ между углами поворота ψ и φ ведомого и ведущего звеньев.

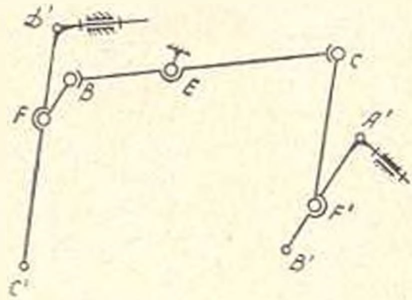

Рис. 4.

Так как в соответствии с рис. 2 имеют место условия $A'B' = AB$ и $C'D' = CD$, то шестизвенный механизм, образованный путем отсоединения от восьмизвенника двухзвенной кинематической цепи $ADB'C'E$ (рис. 4), воспроизводит точно указанную функцию положения $\psi(\varphi)$ четырехзвенника $ABCD$. Точка E может быть произвольно выбрана на продольной оси шатуна, следовательно, число преобразованных механизмов, получаемых по этому способу, равно бесконечности.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 23.IV.1970

Յու. Լ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՏԱՐԱԾԱԿԱՆ ՔԱՌՕՂԱԿԻ ՈՐՈՇ ՀԱՏԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ԱՅԼԱԿԵՐՊՈՒՄՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Ելնելով տարածական քառօղակ մեխանիզմի կինեմատիկական սխեմայի երկրաչափությունից և սիմետրիայի հատկություններից, տրված են երկու թեորեմներ, որոնք հնարավորություն են ընձեռում այլակերպումների միջոցով ստանալ ութօղակ և յոթօղակ լծակավոր մեխանիզմներ՝ շարժաթևի տարածական կորագիծ-համընթաց շարժումով սկզբնական քառօղակի հոդագծերի վրայով։