ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXIII, № 4, 1970 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Д. В. СВЕЧАРНИК, Ю. М. ГАСПАРЯН, Т. А. НАЛЧАДЖЯН

АДАПТИВНЫЙ ПОИСК ОПТИМУМА НОМИНАЛА

Метод оптимума номинала [1] является удобным средством оптимизации различных вероятностных по своей природе процессов. Реализация метода на конкретных производственных процессах уже дала свои плоды: были оптимизированы процесс дистилляции тяжелого дизельного топлива [2], процесс получения ацетилена термоокислительным пиролизом природного газа [3], работа автоматических токарных станков [4] и т. д.

Не останавливаясь на изложении принципа метода оптимума номинала, отметим, что в простейшем случае, когда рассматривается одномерная задача оптимизации, необходимо определить такое смещение x_0 управляющего параметра от его математического ожидания (номинального значения), при котором достигает максимума выражение

$$I(x_0) = \int_{x_1}^{x_2} b(x) f(x, x_0)\, dx, \tag{1}$$

где $f(x)$ — плотность распределения вероятностей параметра x;

$b(x)$ — функция цены, характеризующая эффективность процесса (его результат, оцененный в каких-либо единицах, например, в рублях) при нахождении параметра в точке x;

$x_2 - x_1$ интервал возможных значений параметра.

Часто функция цены и параметры распределения меняются по времени. В таких случаях возникает необходимость следить за дрейфом оптимума. При этом вместо оптимального смещения x_0 приходится определить оптимальную программу $x_0(t)$ движения центра распределения управляющего параметра.

В общем случае, когда исследуется система с n управляющими параметрами, из которых m являются заданными функциями времени, а $n - m$ — фиксированными величинами, задача оптимизации сводится к определению оптимальных управлений (программ) $x_{i0}(t)$, $(i = 1, 2, \cdots, m)$ и постоянных x_{j0}, $(j = m + 1, \cdots, n)$, приводящих к максимуму многократный функционал

$$I[\mathbf{x}_{i0}(t),\ \mathbf{x}_{j0}] = \int_G \cdots \int\int_{t_1}^{t_2} b[\mathbf{x}(t)] f[\mathbf{x}_i(t),\ \mathbf{x}_{i0}(t), \mathbf{x}_j,\ \mathbf{x}_{j0})\, d\mathbf{x}\, dt. \tag{2}$$

Здесь $b[\mathbf{x}(t)]$ — „цена" — многомерная функция координат, учитывающая технико-экономические показатели исследуемого процесса (о способах определения см. [1, 4, 13]), f — многомерная функция плотности распределения вероятностей параметров, G — область пространства, определяемая границами изменений параметров

$$x_{k_2} - x_{k_1}, \quad (k = 1, 2, \cdots, n).$$

В том случае, когда функция стоимости дискретная, необходимо максимизировать следующий функционал:

$$I[\mathbf{x}_{i0}(t),\ \mathbf{x}_{i0}] = \sum_{v=1}^{l} b_v \int_G \cdots \int\int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{x},\ \mathbf{x}_0)\, d\mathbf{x}\, dt. \tag{3}$$

Целевую функцию $I[\mathbf{x}_{i0}(t),\ \mathbf{x}_{j0}]$ можно также представить в виде функции от вектора $\mathbf{x}\{x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n\}$. Если целевая функция $I(x)$ известна аналитически* и дифференцируема, то определение оптимального вектора $\mathbf{x}_0\{x_{10},\ x_{20}, \cdots,\ x_{n0}\}$ в общем случае сводится к решению уравнения

$$\nabla I(\mathbf{x}_0) = 0, \tag{4}$$

где $\nabla I(\mathbf{x}_0)$ — градиент целевой функции

$$\nabla I(\mathbf{x}_0) = \left\| \frac{\partial I}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial I}{\partial x_n} \right\|. \tag{5}$$

Полученное уравнение в общем случае является трансцендентным и его решение затруднительно. Нахождение экстремума целевой функции возможно поисковыми методами. В ряде случаев для этого подходит градиентный метод [6], который, например, связывает координаты $\mathbf{x}[m-1]$ базисной точки с координатами новой точки $\mathbf{x}[m]$ и градиентом целевой функции таким образом, что алгоритм определения оптимального вектора $\mathbf{x}_0$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{x}[m] = \mathbf{x}[m-1] + \gamma[m] \cdot \nabla I(\mathbf{x}[m-1]), \tag{6}$$

где $m - 1$ — номер базисной точки, m — номер новой точки,

$\gamma[m]$ — величина, характеризующая в общем случае величину шага. Если имеет место сходимость этого алгоритма, то при $m \to \infty$ получим

$$\mathbf{x}[m] \to \mathbf{x}_0.$$

С помощью такого подхода определения максимума была решена задача оптимального управления процессом термоокислительного пироли

---

* Это возможно лишь тогда, когда заранее определена многомерная функция распределения плотности вероятностей, а также многомерная функция стоимости; даже в этом случае, ввиду многократности интеграла, она обычно громоздка.

за природного газа [3]. В этом примере исследуемый объект имел шесть управляющих параметров, для которых на основе обработки результатов пассивного * эксперимента была определена шестимерная нормальная функция распределения плотности вероятностей:

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_6) = \frac{1}{8\pi^3 \sqrt{26 \cdot 10^5}} \exp\left(-\frac{A}{52 \cdot 10^5}\right).$$

Здесь

$$A = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} r_{ij} x_i x_j,$$

где x_i, x_j — параметры, между которыми определялись парные коэффициенты корреляции r_{ij}.

Значения коэффициентов r_{ij} приведены в табл. 1.

Таблица 1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	1	−0,307	−0,141	−0,306	0,248	−0,613
x_2		1	−0,157	0,029	−0,014	−0,151
x_3			1	0,015	−0,157	0,449
x_4				1	−0,448	0,265
x_5					1	−0,853
x_6						1

На основе анализа экономических и технологических данных была определена шестимерная функция стоимости:

$$b(x_1, x_2, \cdots, x_6) = 476 + 1{,}186\, x_1 + 12{,}905\, x_2 + 4{,}113\, x_3 + 0{,}432\, x_4 - 5{,}436\, x_5 - 5{,}905\, x_6.$$

Шестикратный интеграл

$$I(x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{60}) = \int_G \cdots \int b(x_1, x_2, \cdots, x_6) \cdot f(x_1 + x_{10}, \cdots, x_6 + x_{60})\, dx_1 \cdots dx_6$$

достигает своего максимума при следующих значениях смещений математических ожиданий управляющих параметров:

$x_{10} = 0{,}12$; $x_{20} = 1{,}3$; $x_{30} = 0{,}6$; $x_{40} = 0{,}5$; $x_{50} = -0{,}8$; $x_{60} = 1{,}1$.

В предложенном оптимальном режиме в выходных пирогазах концентрация ацетилена увеличилась от 7,4 до 7,5 %.

Градиентным методом определения экстремума целевой функции были решены некоторые задачи распознавания образов, адаптивной фильтрации, идентификации объектов, надежности, исследования операции, теории игр и т. д. [5].

* Т. е. обработки уже накопленных в процессе производства статистических данных, без проведения „активного", специально поставленного, поиска.

Но очень часто функция $I(\mathbf{x})$ аналитически не задана (часто очень трудно ее определить) или недифференцируема. Последнее условие имеет место, например, тогда, когда вместо непрерывной функции стоимости $b(\mathbf{x})$ рассматривается дискретная функция b_ν, где ν — порядковый номер области многомерного пространства. Такие функции получены в [2, 4].

В этих случаях величину градиента функции $I(\mathbf{x})$ можно приближенно определить [5, 6, 8] согласно выражению

$$\nabla I(\mathbf{x}) \approx \frac{I_+(\mathbf{x}, a) - I_-(\mathbf{x}, a)}{2a}, \tag{7}$$

где

$$I_\pm(\mathbf{x}, a) = \{I(\mathbf{x} \pm ae_1), I(\mathbf{x} \pm ae_2), \cdots, I(\mathbf{x} \pm ae_n)\}. \tag{8}$$

Здесь через e_i обозначены орты вида

$$e_1(1, 0, \cdots, 0), e_2(0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_n(0, 0, \cdots, 1).$$

Тогда (7) примет следующий вид:

$$\mathbf{x}[m] = \mathbf{x}[m-1] - \gamma[m] \cdot \frac{I_+(\mathbf{x}[m]a[m]) - I_-(\mathbf{x}[m]a[m])}{2a[m]}. \tag{10}$$

Если предположить, что функция $I(\mathbf{x})$ не детерминированная, а случайная $I(\mathbf{y}/\mathbf{x})$ (где $\mathbf{y} = y(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ представляет собой вектор состояния стационарного случайного процесса с плотностью распределения вероятностей $P(\mathbf{y})$ при воздействующих параметрах, определяющих случайным вектором $\mathbf{x}$), то ищется экстремум ее математического ожидания:

$$I(\mathbf{x}) = \int \cdots \int_G I(\mathbf{y}/\mathbf{x}) P(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = M_y\{I(\mathbf{y}/\mathbf{x})\}. \tag{11}$$

Как и выше, оптимальное значение вектора $\mathbf{x}_0$ определяется из условия

$$\nabla I(\mathbf{x}) = M_y\{\nabla_x I(\mathbf{y}/\mathbf{x})\} = 0. \tag{12}$$

Однако, при этом задача оптимизации может быть решена только в том случае, когда заранее известна плотность распределения $P(\mathbf{y})$, т. е. можно заранее определить математическое ожидание $M_y\{I(\mathbf{y}/\mathbf{x})\}$.

При оптимизации реальных процессов представляет практический и теоретический интерес возможность ускорить введение оптимальной программы, устанавливая ее с определенным приближением в процессе накопления статистических данных, когда с достаточной достоверностью еще неизвестны плотность распределения и его характеристики, в частности, математическое ожидание.

В таких случаях определение оптимального вектора $\mathbf{x}_0$ возможно также при помощи градиентного метода, но по отношению не к математическому ожиданию, а к реализациям градиента $\nabla_x I(\mathbf{y}/\mathbf{x})$. Это возможно при помощи метода стохастической аппроксимации [5, 8, 9], согласно которой алгоритм определения оптимального вектора $\mathbf{x}_0$ можно представить в виде:

$$\mathbf{x}[m] = \mathbf{x}[m-1] + \gamma[m] I(\mathbf{y}[m]/\mathbf{x}[m-1]). \tag{13}$$

Когда $I(\mathbf{y}/\mathbf{x})$ аналитически не задана или недифференцируема, алгоритм принимает следующий вид:

$$\mathbf{x}[m] = \mathbf{x}[m-1] + \frac{\gamma[m]}{2a[m]} \{I(\mathbf{y}[m]/\mathbf{x}[m-1], a[m]) -$$

$$- I(\mathbf{y}[m]/\mathbf{x}[m-1], a[m])\}. \tag{14}$$

Алгоритм (14) является стохастическим, в котором, в отличие от детерминированного алгоритма (13), фигурирует реализация стационарной случайной величины, кроме полезной информации часто содержащей также шумы и помехи.

Сходимость алгоритма (14) доказана в [10, 11], где приведены также необходимые и достаточные условия сходимости стохастического алгоритма.

Аналогично дискретным поисковым алгоритмам можно получить и непрерывные алгоритмы. Так, при предельном переходе от разностных уравнений (13, 14) к дифференциальным, дискретному стохастическому алгоритму (14) соответствует следующий непрерывный алгоритм:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \gamma(t) \nabla_x I(\mathbf{y}(t)/\mathbf{x}(t)). \tag{15}$$

Таким образом, получается, что для определения экстремума функционала алгоритмы (13), (14) и (15) дают возможность заменять целевые функции линейной комбинацией некоторых линейно независимых функций и определять оптимальный вектор коэффициентов, вместо трудоемкого метода последовательных приближений.

Так как процессы обучения и адаптации также характеризуются определением оптимального вектора коэффициентов (с учетом накапливаемого опыта), то можно предложенный способ нахождения оптимума номинала (оптимального вектора $\mathbf{x}_0$) также считать адаптивным и использовать арсенал этих методов для значительного ускорения и облегчения поиска оптимума номинала.

Следует добавить, что приведенные алгоритмы применимы для одноэкстремального случая целевой функции, что практически чаще встречается при определении оптимума номинала. В случае многоэкстремальной целевой функции можно пользоваться алгоритмом, предложенном, например, в [12].

Ереванский политехнический
институт им. К. Маркса
Московский институт инженеров транспорта

Поступило 11.XI.1969.

Դ. Վ. ՍՎԵՉԱՐՆԻԿ, Յու. Մ. ԴՈՒԴԿԱՐՅԱՆ, Թ. Ա. ՆԱԼՉԱՋՅԱՆ

ՆՈՄԻՆԱԼԻ ՕՊՏԻՄՈՒՄԻ ԱԴԱՊՏԻՎ ՓՆՏՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Հոդվածում բերվում է նոմինալի օպտիմումի որոշման խնդրի առաջադրման ընդհանուր դեպքում, որտեղ նպատակային ֆունկցիան կազմվում է բազմաչափ վեկտորի տեսքով։ Այդ վեկտորի օպտիմումի որոշման համար առաջարկվում է կիրառել գրադիենտային մեթոդը։ Բերվում են օպտիմալ վեկտորի որոշման ալգորիթմները պարամետրերի հավանականությունների բաշխման օրենքների անալիտիկորեն առաջադրված կամ չառաջադրված դեպքերի համար։

Ավելի բարդ դեպքերում, երբ անհրաժեշտ է նոմինալի օպտիմումը որոշել փորձակարգական տվյալների հավաքման ընթացքում, օպտիմալ վեկտորի որոշման համար առաջարկվում է կիրառել հավանականային ալգորիթմը, որը համընկնում է ուսուցման և ադապտացիայի պրոցեսների ալգորիթմների հետ։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свечарник Д. В.* „Труды института машиноведения АН СССР", № 10, 1957.
2. *Горелова Г. В.* „Известия высших учебных заведений. Электромеханика", № 3, 1966.
3. *Налчаджян Т. А.* „Известия АН Арм. ССР (серия ТН)", т. XXI, № 2, 1968.
4. *Налчаджян Т. А.* Кандидатская диссертация, ЕрПИ, 1968.
5. *Цыпкин Я. З.* Адаптация и обучение в автоматических системах. Изд. „Наука", 1968.
6. *Поляк Б. Т.* Кандидатская диссертация, МГУ, 1963.
7. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. Физматгиз 1963.
8. *Robbins H., Monro S.* Ann. Math. Statistics, v. 22, № 1, 1951.
9. *Гладышев Е. Г.* „Теория вероятностей и ее применение" т. 10, № 2, 1965.
10. *Blum I. A.* Ann. Math. Statistics, v. 25, № 2, 1954.
11. *Dvoretzky A.* 3-rd Berceley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, v. 1, 1956.
12. *Вайсборд Э. М., Юдин Д. Б.* „Известия АН СССР. Техническая кибернетика", № 5, 1968.
13. Метод оптимума номинала и его применение. Под ред. Свечарника Д. В. Изд. „Энергия", 1970.