

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Н. К. СНИТКО

НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ОДНОСТОРОННИЕ СМЕЩЕНИЯ
 ЖЕСТКОЙ ОПОРЫ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ ПРИ
 ПРИМЕНЕНИИ БИЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ
 МЕЖДУ ПЕРЕМЕЩЕНИЕМ И ОТПОРОМ

В статье рассматривается действие на стенку (или опору), заглубленную в грунт, давления от землетрясения, в результате которого возникают сложные *неустановившиеся* колебания [1], в общем аналитическом выражении которых нельзя пренебрегать колебаниями с частотой свободных. Такой случай можем иметь при действии динамического бокового давления насыпи на опору контактной сети железных дорог при различных скоростях движения поезда [2]. Как показано в [3], и при действии кратковременной импульсной нагрузки боковое давление грунта меняется по периодическому закону с постоянной частотой. В силу указанного рассмотрено действие периодической силы. Кроме того, применением билинейной зависимости между отпором и осадком учтены упруго-пластические деформации среды, причем, разгрузка не рассматривается.

Движение стенки, заглубленной в грунт (рис. 1, а), представляем в виде перемещений, вызванных поворотом относительно какой-то точки D на угол φ . Расстояние точки поворота h_0 от поверхности грунта зависит не только от высоты заглубления h и плеча действия силы H , но и от динамической силы P , и сил инерции, и резко меняется со временем [см. ф-лу (13)]. Дифференциальное уравнение горизонтальных колебаний опоры получим, составляя динамическое условие равновесия системы в виде суммы моментов всех сил, включая и инерционные силы, относительно точки поворота. В уравнение равновесия войдут: момент динамической нагрузки $M_p = -P_l(H - h_0)$, восстанавливающий момент реакций грунтовой среды $M_{\text{вос}}$, момент сил инерции при повороте опоры на угол $\varphi = M_I$ и момент сил сопротивления. Последний принимаем по Фойгту: $M_{\text{соп}} = l \varphi'$, где l — коэффициент сопротивления.

Принимая за положительные моменты, действующие по часовой стрелке, запишем:

$$M_p - M_{\text{вос}} + M_{\text{соп}} - M_I = 0. \quad (1)$$

Момент сил инерции найдем, выражая элементарную силу инерции через ускорение горизонтального перемещения

$$dl = -\bar{m} y'' dz,$$

где $\bar{m} = \gamma b g_{\text{оп}}$ — погонная масса опоры; $\bar{\gamma}$ и b — размеры сечения опоры; $\gamma_{\text{оп}}$ — объемный вес материала опоры; g — ускорение силы тяжести.

Так как $y'' = \varphi'' z$, то $dI = -m \varphi'' z dz$. Момент сил инерции относительно точки поворота:

$$M_I = - \int_{-h_1}^{h_1} m \varphi'' z^2 dz = - r \varphi'', \quad (2)$$

где

$$h_1 = H + h_0; \quad r = \frac{\bar{m}}{3} (h_1^3 + h_0^3). \quad (3)$$

Определим восстанавливающий момент, т. е. момент от реактивного воздействия грунта, представив его в форме:

$$M_{\text{рек}} = c \varphi, \quad (4)$$

где c — коэффициент жесткости, т. е. восстанавливающий момент, соответствующий $\varphi = 1$. Причем, $c = 1/\Delta$, где Δ — единичный статический угол поворота, вызванный действием силы $P = 1$ (рис. 1, а). Рассматривая

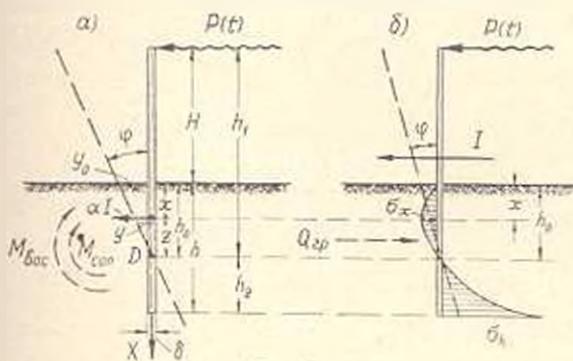


Рис. 1.

ривая статическое действие силы $P = 1$, найдем выражение момента всех реактивных усилий, вызываемых в грунте поворотом жесткой опоры. Если b — перпендикулярный размер, а интенсивность реакции грунта на расстоянии x от начала координат O будет p_x , то, вводя для динамической задачи гипотезу Винклера, получаем:

$$p_x = k_x y_x. \quad (5)$$

Коэффициент постели k_x будем принимать *линейно* меняющимся с глубиной данной точки от поверхности, т. е.

$$k_x = k \frac{x}{h} = C_h b \frac{x}{h}, \quad (6)$$

тогда

$$p_x = \frac{kx}{h} y_x. \quad (7)$$

Для жесткой стенки получаем:

$$y_x = y_0 - \varphi x = \varphi (h_0 - x), \quad (8)$$

где $y_0 = \varphi h$ — перемещение у поверхности грунта.

Подставляя выражение (8) в (7), получаем:

$$p_x = \frac{k\varphi}{h} x (h_0 - x). \quad (9)$$

Эпюра реактивного давления грунта параболическая.

Момент всего реактивного давления относительно точки поворота будет:

$$M_{\text{вот}} = \int_0^{h_0} p_x (h_0 - x) dx = c \varphi, \quad (10)$$

где c — коэффициент жесткости:

$$c = kh \left(\frac{h_0^2}{2} - \frac{2h_0h}{3} + \frac{h^2}{4} \right). \quad (11)$$

Задача сводится к определению h_0 — глубины точки поворота D . Для статической задачи известна следующая формула для h_0 [1]:

$$h_0 = \frac{2H + \frac{3}{2}h}{3H + 2h} h. \quad (12)$$

Эту формулу применяем лишь для первой итерации. Для динамической задачи, исходя из условия $\Sigma y = 0$, имеем:

$$h_{0, \text{дин}} = \frac{P_0 \sin(\theta t + i) + \frac{1}{3} k \varphi h^2 - \bar{m} \varphi'' \left(\frac{H^2 - h^2}{2} \right)}{\frac{1}{3} k \varphi h + \bar{m} \varphi'' (H + h)}. \quad (13)$$

Динамическое условие равновесия опоры по уравнению (1) будет:

$$r \varphi'' + c \varphi + t \varphi' = P_t (H + h_0) \quad (14)$$

или

$$\varphi'' + 2z\varphi' + \omega^2 \varphi = \frac{1}{r} P_t (H + h_0), \quad (15)$$

где „поворотная“ частота собственных колебаний

$$\omega = \sqrt{c/r}, \quad (16)$$

а множитель при первой производной — $2z = t/r$ (z — коэффициент затухания по Фойгту).

Для вычисления частоты ω вносим в (16) значение c по формуле (11) и значение r по формуле (3).

Пусть P_t — периодическая сила, меняющаяся по закону:

$$P_t = P_0 \sin(\theta t + i),$$

где θ — частота возмущающей силы, P_0 — амплитуда силы, i — начальная фаза действия силы. Тогда, обозначая в уравнении (15)

$$p_0 = \frac{P_0}{r} (H + h_0) \text{ [сек}^{-2}\text{]}. \quad (17)$$

получаем дифференциальное уравнение:

$$\varphi'' + 2\varepsilon\varphi' + \omega^2\varphi = p_0 \sin(\theta t + \lambda).$$

Общее решение этого уравнения при рассмотрении неустановившегося режима вынужденных колебаний и наличии начальных значений φ_0 и φ'_0 будет:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{P_0}{Vz} \sin(\theta t + \lambda + \delta) + e^{-\varepsilon t} \left\{ \varphi_0 \left(\cos \omega_1 t + \frac{\varepsilon}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) + \right. \\ & + \frac{\varphi'_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t - \frac{P_0}{Vz} \left[\sin(\lambda + \delta) \cos \omega_1 t + \right. \\ & \left. \left. + (\varepsilon \sin(\lambda + \delta) + \theta \cos(\lambda + \delta)) \frac{\sin \omega_1 t}{\omega_1} \right] \right\}, \quad (18) \end{aligned}$$

где $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - \varepsilon^2}$ — частота собственных затухающих колебаний; δ — разность фаз между возмущающей силой и перемещением, определяемая выражениями:

$$\sin \delta = -\frac{2\varepsilon\theta}{Vz}; \quad \cos \delta = \frac{\omega^2 - \theta^2}{Vz}. \quad (19)$$

В выражениях (18) и (19) обозначено:

$$z = (\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\theta^2\varepsilon^2. \quad (20)$$

Переходим к учету пластических деформаций среды. Для упрощения решения нелинейной задачи вводим билинейную зависимость [2] для двух основных этапов действия возмущающей силы (рис. 2, а): в

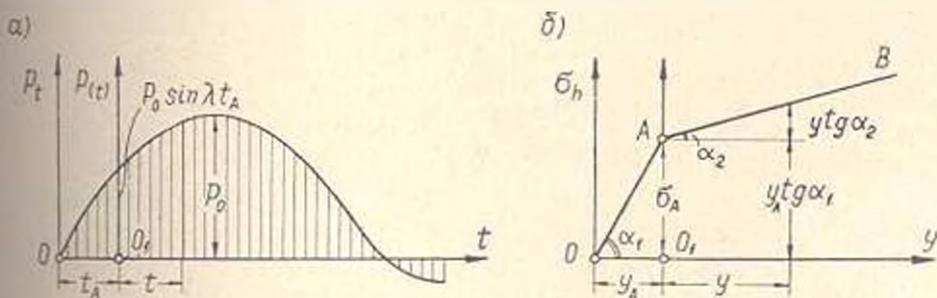


Рис. 2.

интервале $0 < t \leq t_A$ и для периода $t > t_A$, причем, момент времени t_A соответствует достижению напряжения σ_h в грунте у низа опоры предела пропорциональности. Соответственно этим интервалам зависимость между σ_h и y_h на первом участке будет:

$$\sigma_h = C_1 y_h = y_h \operatorname{tg} \alpha_1, \quad (21)$$

на втором участке:

$$\sigma_h = \sigma_A + C_2 (y_h - y_A) = \sigma_A + y \operatorname{tg} \alpha_2 = \sigma_A + C_2 y. \quad (22)$$

Под C_1 и C_2 понимаем коэффициенты постели соответственно для упругой и для пластической области работы.

Для пластической области имеем новые выражения для $M_{вос}$ и $M_{соп}$:

$$\begin{aligned} M_{вос} &= C_2 \varphi + C_1 \varphi_A \\ M_{соп} &= k_2 \varphi' = 2r \varepsilon_2 \varphi' \end{aligned} \quad (23)$$

Далее применяем „клавишный“ метод решения задачи. Он заключается в поступательном использовании интеграла (14) с переносом начала координат.

Для первого этапа упругих деформаций (коэффициент постели C_1 и при $t = 0$: $\varphi_0 = 0$, $\varphi'_0 = 0$) имеем по (18):

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{p_0}{\sqrt{z_1}} \left\{ \sin(\theta t + \delta) - \right. \\ &\left. - e^{-\varepsilon_1 t} \left[\sin \delta \cos \omega_{11} t + (\varepsilon_1 \sin \delta + \theta \cos \delta) \frac{\sin \omega_{11} t}{\omega_{11}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= (\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\theta^2 \varepsilon_1^2; \quad \omega_1 = \sqrt{c_1/r} \\ \omega_{11} &= \sqrt{\omega_1^2 - \varepsilon_1^2}; \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{n} \omega_1; \quad \sin \delta = -\frac{2\varepsilon_1 \theta}{\sqrt{z_1}} \end{aligned} \quad (25)$$

c_1 определяется согласно (11) по величине k_1 .

Выражение для скорости:

$$\begin{aligned} \varphi' &= \frac{p_0}{\sqrt{z_1}} \theta \cos(\theta t + \delta) + e^{-\varepsilon_1 t} \left\{ \varepsilon_1 \left[\sin \delta \cos \omega_{11} t + \right. \right. \\ &\left. \left. + (\varepsilon_1 \sin \delta + \theta \cos \delta) \frac{\sin \omega_{11} t}{\omega_{11}} \right] + \left[\omega_{11} \sin \delta \sin \omega_{11} t - \right. \right. \\ &\left. \left. - (\varepsilon_1 \sin \delta + \theta \cos \delta) \cos \omega_{11} t \right] \right\}. \end{aligned} \quad (26)$$

Пользуясь выражением (25) и составляя условие достижения предела пропорциональности, получим то значение времени t_A , для которого справедливо решение в упругой области:

$$z_A = C_1 y_A = C_1 \varphi_A h_p = z_{пу}. \quad (27)$$

Для этого момента времени находим $i = \theta t_A$, после чего, перенеся начало координат в точку O_1 (рис. 2, б) и зная φ_A и φ'_A , переходим к решению нового дифференциального уравнения, которое составляем по [2], принимая во внимание (23). Оно имеет следующий вид:

$$\varphi'' + 2\varepsilon_2 \varphi' + \omega_2^2 \varphi = p_0 \sin(\theta t + i) - K, \quad (28)$$

где

$$K = \frac{c_1}{r} \varphi_A; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{r}}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{n} \omega_2.$$

В дальнейшее выражение интеграла уравнения (28) вводим разность фаз δ_1 ; $\sin \delta_1 = -2 \varepsilon_2 b_1 / z_2$.

Интеграл дифференциального уравнения (28) с учетом начальных условий (при $t = 0$: $\varphi_A = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_A = \dot{\varphi}_0$) будет:

$$\begin{aligned} \varphi = & \frac{p_0}{|z_2|} \sin(5t + \lambda + \delta_1) - e^{-\nu t} \left\{ \varphi_0 \left(\cos \omega_2 t + \frac{\varepsilon_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) + \right. \\ & + \dot{\varphi}_0 \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} - \frac{p_0}{|z_2|} \left[\sin(\lambda + \delta_1) \cos \omega_2 t + (\varepsilon_2 \sin(\lambda + \delta_1) + \right. \\ & \left. + \theta \cos(\lambda + \delta_1)) \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right] \left. - \frac{K}{\omega_2^2} \left[1 - e^{-\nu t} \left(\cos \omega_2 t + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{\varepsilon_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь пренебрегаем влиянием затухания на частоту ω_2 .

Для второго участка колебаний вносим $\varphi_0 = \varphi_A$, $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_A$, определенные для конца первого участка. Если на втором участке имеет место резонанс ($\omega_2 = \theta$), то вместо (29) получим:

$$\begin{aligned} \varphi = & -\frac{p_0}{2 \varepsilon_2 b_1} \cos(\theta t + \lambda) + e^{-\nu t} \left\{ \varphi_0 \left(\cos \omega_2 t + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\varepsilon_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) + \dot{\varphi}_0 \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right\} + \frac{p_0}{2 \varepsilon_2 b_1} \left[\cos \lambda \cos \omega_2 t - \right. \\ & \left. - (\theta \sin \lambda - \varepsilon_2 \cos \lambda) \frac{\sin \omega_2 t}{\omega_2} \right] - \frac{K}{\omega_2^2} \left[1 - e^{-\nu t} \left(\cos \omega_2 t + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\varepsilon_2}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right) \right]. \end{aligned}$$

При этом учтено, что $|z_2| = 2 \varepsilon_2 b_1$; $\delta_2 = 270^\circ$.

АИСИ

Поступило 25.III. 1970.

Կ. Կ. ԱՆԻՏՅԱՆ

ԿՈՇՏ ՀԵՆԱՐԱՆԻ ԶԿԱՅՈՒՆԱՑԱՆ ՄԻՍԿՈՂՄԱՆԻ ՇԵՂՈՒՄՆԵՐԸ ԳՐՈՒՆՏԱՅԻՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ՝ ՏԵՂԱՓՈԽՈՒՄՆԵՐԻ ԵՎ ԳՐՈՒՆՏԻ ՀԱԿԱԶԴԻՄԱՆ ՄԻՋԵՎ ԵՐԿԵՑԱՅԻՆ ԿԱԽՄԱՆ ԴԻՊԼՈՒՄ

Ա. մ փ ո փ ո լ մ

Ուսումնասիրված են կոշտ հենարանի շկալունադամ միակողմանի շիդումները առաձգա-պլաստիկական միջավայրում, երբ միջավայրի դիմադրությունը ժամանակի ընթացքում փոփոխվում է Լերկոմային սրենքով:

Ստացված են հենարանի տեղափոխումների լուծումները վերջինիս դիմադրության չորաբանչյուր փուլի համար՝ հաշվի առնելով ֆազերի սարքի-բախտումները տեղափոխումների և զրոյի: ումի միջև:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Низаров А. Г.* Сейсмические толчки и удары и их действие на сооружения. Сборник трудов Бюро антисейсмического строительства АН Грузинской ССР, Тбилиси, т. 1, 1945.
2. *Eisenmann J.* Stress Distribution in the Permanent Way Due to Heavy Axle Loads and High Speeds. „Bull. Amer. Railway Eng. Assoc.“, 1969, № 622, „Proceedings“, 71.
3. *Снитко Н. К.* Динамика сооружений. Гостройиздат, 1960.