

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Э. Е. ХАЧИЯН, Л. С. КАЗАРЯН, Л. П. АВАКЯН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ЧАСТОТ И ФОРМ КОЛЕБАНИЙ
 МНОГОСТУПЕНЧАТЫХ СТОЕК

Рассмотрим свободные изгибные колебания многоступенчатых стоек (рис. 1). Обозначим жесткость, погонный вес и высоту i -ой ступени соответственно через $E_i J_i$; q_i ; l_i . Принимая размеры по-

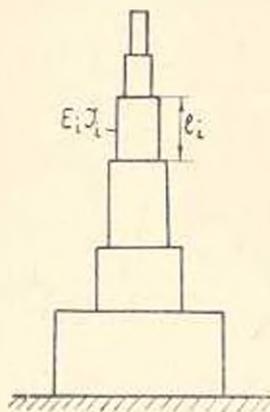


Рис. 1.

перечных сечений малыми по сравнению с их высотами, дифференциальное уравнение свободных колебаний в пределах i -ой ступени можно написать следующим образом:

$$E_i J_i \frac{\partial^4 y_i(x_i, t)}{\partial x_i^4} + \frac{q_i}{g} \frac{\partial^2 y_i(x_i, t)}{\partial t^2} = 0 \quad 0 \leq x_i \leq l_i, \quad (1)$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Начало координат для данной ступени берем в центре ее основания. Решение (1) ищем в виде

$$y_i(x_i, t) = Y_i(x_i) f_i(t), \quad 0 \leq x_i \leq l_i. \quad (2)$$

На основании (1) и (2) получим:

$$Y_i^{IV}(x_i) + \nu_i^4 Y_i(x_i) = 0, \quad 0 \leq x_i \leq l_i. \quad (3)$$

где

$$\nu_i^2 = \sqrt{\frac{p^2 q_i}{g E_i J_i}}, \quad (4)$$

p — круговая частота свободных колебаний.

Решение уравнения (3) представляется следующим образом

$$Y_i(x_i) = A_i \sin \lambda_i x_i + B_i \cos \lambda_i x_i + C_i \operatorname{sh} \lambda_i x_i + D_i \operatorname{ch} \lambda_i x_i. \quad (5)$$

Для определения $4n$ постоянных A_i, B_i, C_i, D_i имеем четыре граничных условия

$$\text{при } x_1 = 0, \quad Y_1(0) = 0, \quad Y_1'(0) = 0;$$

$$\text{при } x_n = l_n, \quad Y_n(l_n) = 0, \quad Y_n'(l_n) = 0.$$

Кроме того, имеем $4n - 4$ условий непрерывности прогибов, углов наклона к касательной, изгибающих моментов и поперечных сил по линиям разрыва. А именно, при $x_{i-1} = l_{i-1}$ и $x_i = 0$

$$Y_{i-1}(l_{i-1}) = Y_i(0); \quad E_{i-1} J_{i-1} Y_{i-1}'(l_{i-1}) = E_i J_i Y_i'(0); \quad (7)$$

$$Y_{i-1}(l_{i-1}) = Y_i'(0); \quad E_{i-2} J_{i-2} Y_{i-2}''(l_{i-1}) = E_i J_i Y_i''(0), \quad (i = 2, 3, \dots, n).$$

Подставляя значения $Y_i(x_i)$ из (5) в (6) и (7), получим

$$B_i + D_i = 0; \quad A_i + C_i = 0;$$

$$-A_n \sin \lambda_n l_n - B_n \cos \lambda_n l_n + C_n \operatorname{sh} \lambda_n l_n + D_n \operatorname{ch} \lambda_n l_n = 0;$$

$$-A_n \cos \lambda_n l_n + B_n \sin \lambda_n l_n + C_n \operatorname{ch} \lambda_n l_n + D_n \operatorname{sh} \lambda_n l_n = 0;$$

$$\begin{aligned} A_{i-1} \sin \lambda_{i-1} l_{i-1} + B_{i-1} \cos \lambda_{i-1} l_{i-1} + C_{i-1} \operatorname{sh} \lambda_{i-1} l_{i-1} + D_{i-1} \operatorname{ch} \lambda_{i-1} l_{i-1} = \\ = B_i D_i \lambda_{i-1} (A_{i-1} \cos \lambda_{i-1} l_{i-1} - B_{i-1} \sin \lambda_{i-1} l_{i-1} + C_{i-1} \operatorname{ch} \lambda_{i-1} l_{i-1} + \\ + D_{i-1} \operatorname{sh} \lambda_{i-1} l_{i-1}) = \lambda_i (A_i + C_i); \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E_{i-1} J_{i-1} \lambda_{i-1}^2 (-A_{i-1} \sin \lambda_{i-1} l_{i-1} - B_{i-1} \cos \lambda_{i-1} l_{i-1} + C_{i-1} \operatorname{sh} \lambda_{i-1} l_{i-1} + \\ + D_{i-1} \operatorname{ch} \lambda_{i-1} l_{i-1}) = E_i J_i \lambda_i^2 (-B_i + D_i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{i-1} J_{i-1} \lambda_{i-1}^3 (-A_{i-1} \cos \lambda_{i-1} l_{i-1} + B_{i-1} \sin \lambda_{i-1} l_{i-1} + C_{i-1} \operatorname{ch} \lambda_{i-1} l_{i-1} + \\ + D_{i-1} \operatorname{sh} \lambda_{i-1} l_{i-1}) = E_i J_i \lambda_i^3 (-A_i + C_i), \end{aligned}$$

$$(i = 2, 3, 4, \dots, n).$$

Таким образом, для определения $4n$ коэффициентов имеем систему $4n$ уравнений (8). Для получения частотного уравнения надо приравнять нулю определитель $4n$ порядка, получаемый из коэффициентов системы (8). Затруднения, связанные с решением таких определителей высокого порядка, делают практически невозможным определение частот и форм колебаний ступенчатых стержней. Для практического разрешения этой задачи авторы непосредственно исследовали систему $4n$ уравнений (8). Пользуясь принципом математической индукции, путем взаимного исключения неизвестных коэффициентов, систему уравнений (8) можно привести к системе двух уравнений относительно коэффициентов A_1 и B_1 :

$$z_1^{(i)} A_1 + z_2^{(i)} B_1 = 0; \quad (9)$$

$$z_3^{(i)} A_1 + z_4^{(i)} B_1 = 0,$$

где $z_1^{(i)}, z_2^{(i)}, z_3^{(i)}, z_4^{(i)}$ определяются по следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned}
z_1^{(i)} &= \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)^2 \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} S_i z_1^{(i-1)} + \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)^2 \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} T_i z_2^{(i-1)} + \\
&\quad + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} V_i z_{1\phi}^{(i-1)} + U_i z_{2\phi}^{(i-1)}; \\
z_2^{(i)} &= \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)^2 \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} S_i z_2^{(i-1)} - \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)^2 \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} T_i z_1^{(i-1)} + \\
&\quad + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} V_i z_{2\phi}^{(i-1)} + U_i z_{1\phi}^{(i-1)}; \\
z_3^{(i)} &= \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)^2 \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} V_i z_1^{(i-1)} + \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)^2 \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} S_i z_2^{(i-1)} + \\
&\quad + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} U_i z_{1\phi}^{(i-1)} + T_i z_{2\phi}^{(i-1)}; \\
z_4^{(i)} &= \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)^2 \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} V_i z_2^{(i-1)} - \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i}\right)^2 \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} S_i z_1^{(i-1)} + \\
&\quad + \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} U_i z_{2\phi}^{(i-1)} + T_i z_{1\phi}^{(i-1)}.
\end{aligned} \tag{10}$$

В системе уравнений (10)

$$\begin{aligned}
S_i &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \lambda_i l_i + \cos \lambda_i l_i), \\
T_i &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \lambda_i l_i + \sin \lambda_i l_i), \\
U_i &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \lambda_i l_i - \cos \lambda_i l_i), \\
V_i &= \frac{1}{2} (\operatorname{sh} \lambda_i l_i - \sin \lambda_i l_i).
\end{aligned} \tag{11}$$

представляют известные функции А. Н. Крылова, а функции $z_{1\phi}^{(i-1)}$, $z_{2\phi}^{(i-1)}$, $z_{1\phi}^{(i-1)}$, $z_{2\phi}^{(i-1)}$ получаются из функции $z_1^{(i-1)}$, $z_2^{(i-1)}$, $z_3^{(i-1)}$, $z_4^{(i-1)}$ циклическими перестановками функций (11) (первые два прямыми перестановками, а последние два обратными). Формула (10) справедлива для всех значений $i = 2, 3, \dots, n$ при следующих начальных условиях:

$$\begin{aligned}
z_1^{(2)} = z_{2\phi}^{(1)} = T_1; \quad z_3^{(2)} = z_{1\phi}^{(1)} = V_1; \\
z_2^{(2)} = z_1^{(1)} = S_1; \quad z_4^{(2)} = z_{2\phi}^{(1)} = U_1.
\end{aligned} \tag{12}$$

Таким образом, частотное уравнение многоступенчатого бруса, согласно (9), будет:

$$z_1^{(i)} z_1^{(i)} - z_2^{(i)} z_2^{(i)} = 0. \tag{13}$$

На систему (9) имеем:

$$A_1 = - \frac{z_1^{(0)}}{z_1^{(1)}} B_1. \quad (14)$$

Остальные коэффициенты системы (8) определяются по следующим рекуррентным формулам через коэффициенты A_i и B_i :

$$\begin{aligned} A_i &= \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \right)^3 \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} a_{i-1} - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} b_{i-1}; \\ C_i &= - \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \right)^3 \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} a_{i-1} - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} b_{i-1}; \\ B_i &= \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \right)^2 \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} C_{i-1} - d_{i-1}; \\ D_i &= - \left(\frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \right)^2 \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} c_{i-1} - d_{i-1}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} a_{i-1} &= z_1^{(i-1)} A_1 + z_2^{(i-1)} B_1; & c_{i-1} &= z_1^{(i-1)} A_1 + z_2^{(i-1)} B_1; \\ b_{i-1} &= z_1^{(i-1)} A_1 - z_2^{(i-1)} B_1; & d_{i-1} &= z_3^{(i-1)} A_1 + z_4^{(i-1)} B_1. \end{aligned} \quad (16)$$

Вычисления по формулам (9) — (16) легко осуществляются на ЭВМ.

В качестве примера определим частоты и формы колебания двухступенчатой и десятиступенчатой стоек, для различных отношений жесткостей и высот стоек. Материал стойки предполагается однородным ($E_i = \text{const}$). Поперечные сечения стоек прямоугольные постоянной шириной h и переменной высотой b_i . Вводим следующие обозначения:

$$\frac{l_{i-1}}{l_i} = k_{2i-2}; \quad \frac{b_{i-1}}{b_i} = k_{2i-1}; \quad \lambda_i l_i = \mu. \quad (17)$$

Тогда учитывая, что $q_i = \nu F_i$ (ν — плотность материала), $F_i = hb_i$,

$J_i = \frac{hb_i^3}{12}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{E_{i-1} J_{i-1}}{E_i J_i} &= k_{2i-2}^3; & \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} &= \sqrt{\frac{1}{k_{2i-1}}}; \\ \lambda_i l_i &= \frac{\mu \left[\overline{k_2} \cdot \sqrt{\overline{k_3}} \cdot \overline{k_4} \cdots \overline{k_{2i-1}} \right]}{k_2 \cdot k_4 \cdot k_6 \cdots k_{2i-2}}, \\ & (i = 2, 3, \dots, n). \end{aligned} \quad (18)$$

Частоты колебания в силу принятых обозначений будут иметь вид

$$p_i = \frac{\mu_j^2}{l_i^2} \sqrt{\frac{g E_i J_i}{q_i}}, \quad (19)$$

где μ_j — корни характеристического уравнения (14).

Таблица 1

Частоты и коэффициенты формы колебаний двухступенчатого бруса

$\frac{E_2 J_2}{E_1 J_1}$	l_1	Первая форма колебания								Вторая форма колебания					
		l_2	k_1	μ_1	μ_1^2	$A_{11} - C_{11}$	A_{21}	B_{21}	C_{21}	D_{21}	μ_2	μ_2^2	$A_{11} - C_{11}$	A_{21}	B_{21}
2	1	0,978	0,956	-0,712	-1,308	0,165	0,250	-0,902	2,222	4,937	-0,978	-0,235	-1,731	0,061	0,141
4	1	1,0035	1,019	-0,695	-1,634	0,455	0,581	-1,238	2,071	4,289	-0,921	-0,491	-1,937	0,007	0,211
6	1	1,02	1,01	-0,688	-1,824	0,714	0,829	-1,514	1,985	3,94	-0,853	-0,639	-1,965	0,001	0,198
1/2	1	0,893	0,797	-0,761	-1,135	0,093	-0,198	-0,526	2,424	5,375	-1,012	0,188	-1,14	0,331	-0,142
1/4	1	0,847	0,717	-0,792	-1,067	-0,112	-0,360	-0,117	2,452	6,012	-1,050	0,327	-0,931	0,451	-0,255
1/6	1	0,819	0,671	-0,812	-1,042	0,157	-0,442	-0,368	2,442	5,963	-1,069	0,392	-0,837	0,515	-0,304
4	3	1,512	2,286	-0,721	-1,185	-0,540	0,007	-0,945	3,548	12,588	-1,019	1,641	-1,139	-0,290	0,130
1/4	1/3	0,445	0,198	-0,786	-0,819	0,171	-0,007	-0,346	1,357	1,841	-1,255	-0,795	-0,647	0,219	-0,162
Третья форма колебания									Четвертая форма колебания						
k_1	k_2	μ_3	μ_3^2	$A_{11} - C_{11}$	A_{21}	B_{21}	C_{21}	D_{21}	μ_4	μ_4^2	$A_{11} - C_{11}$	A_{21}	B_{21}	C_{21}	D_{21}
2	1	3,718	13,823	-1,005	1,567	-0,398	0,219	0,184	5,154	26,563	-1,002	0,491	1,664	0,130	-0,120
4	1	3,531	12,468	-1,007	1,716	-1,018	-0,593	0,559	4,804	23,078	-1,007	0,992	1,569	0,080	-0,070
6	1	3,413	11,65	-1,001	1,889	-1,527	-0,900	0,865	1,627	21,410	-1,010	1,262	1,383	0,057	0,061
1/2	1	4,183	17,497	-0,993	1,204	0,245	0,089	-0,131	5,784	33,454	-0,999	-0,187	1,087	0,164	0,174
1/4	1	4,167	19,354	-0,989	0,895	0,362	0,069	-0,168	6,059	36,711	-1,000	-0,679	0,822	-0,319	0,331
1/6	1	4,605	21,206	-0,989	0,691	0,382	0,024	-0,064	6,232	38,838	-1,001	-0,816	0,695	-0,390	0,405
4	3	5,569	30,319	-1,012	-0,120	2,316	0,345	-0,670	7,690	59,136	-1,000	-1,376	-1,151	0,156	-0,056
1/4	1/3	2,274	5,171	-1,057	0,079	-0,962	0,310	-0,316	3,230	10,433	-0,993	0,930	0,672	0,365	-0,365

Первые четыре корня μ частотного уравнения (14) и коэффициенты форм колебаний при различных значениях k_1 и k_2 приведены в табл. 1. Как видно из таблицы, при равных длинах ступеней $k_2 = 1$ с уменьшением жесткостей верхней ступени частота первой формы колебания бруса растет, а с увеличением, наоборот, убывает. Однако убывание частоты происходит более резко, чем увеличение. Так, например, если при $\frac{E_2 J_2}{E_1 J_1} = 4$ и $l_1 = l_2$, первая частота ступенчатой стойки в 1,17 раз больше первой частоты стойки с постоянной жесткостью $E_1 J_1$, то при $\frac{E_2 J_2}{E_1 J_1} = \frac{1}{4}$ и $l_1 = l_2$, она в 1,91 раза меньше первой частоты стойки с постоянной жесткостью $E_2 J_2$. Но для второй и третьей форм колебаний, как при уменьшении, так и при увеличении жесткости верхней ступени, значения частот убывают, причем более медленно, чем при первой форме колебания. Полученные результаты показаны на рис. 2 и рис. 3.

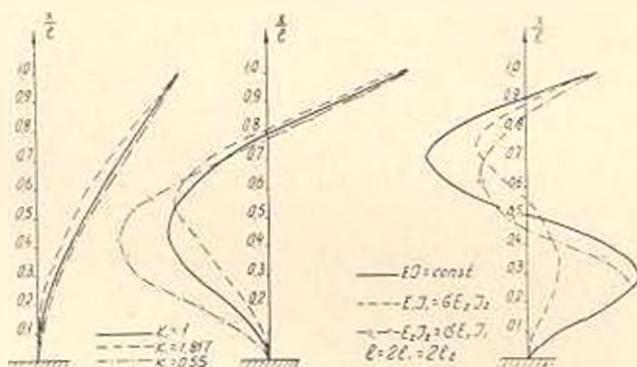


Рис. 2.

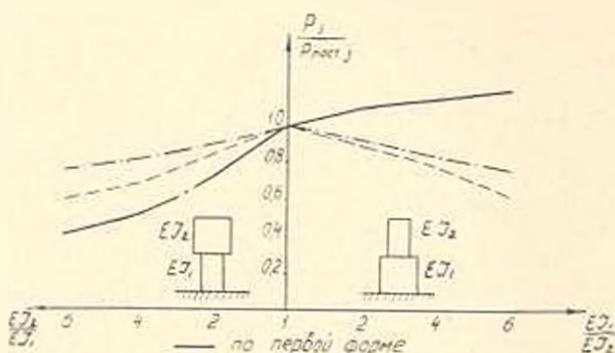


Рис. 3.

По приведенным рекуррентным формулам были вычислены также частоты и формы колебаний десятиступенчатых стоек при двух вариантах изменения жесткостей:

I вариант

$$E_1 J_1 = (1,1 - 0,1 i) E_2 J_2$$

$$k_{2i-2} = 1$$

$(i = 2, 3, 4, \dots, 10)$

II вариант

$$E_1 J_1 = i E_2 J_2$$

$$k_{2i-2} = 1$$

$(i = 2, 3, 4, \dots, 10)$

Корни характеристического уравнения (13) для первых четырех форм колебаний имеют следующие значения:

I вариант

$$\mu_1 = 0,203; \quad \mu_2 = 0,445; \quad \mu_3 = 0,709; \quad \mu_4 = 0,975.$$

II вариант

$$\mu_1 = 0,180; \quad \mu_2 = 0,557; \quad \mu_3 = 0,981; \quad \mu_4 = 1,390.$$

Следовательно, первая частота ступенчатой стойки варианта I в 1,17 раза больше первой частоты стойки с постоянной жесткостью $E_1 J_1$ той же высоты, а вторая частота, наоборот, в 1,16 раза меньше. Для ступенчатой стойки варианта II частота первой формы колебания в 2,47 раза меньше, чем частота первой формы стойки с постоянной жесткостью $E_{10} J_{10}$ той же высоты, а частота второй формы колебания соответственно меньше в 1,59 раза.

АНСМ

Поступило 22.I 1969.

Է. Ե. ԿԱԶԻՅԱՆ, Լ. Ս. ՂԱԶԱՐՅԱՆ, Ջ. Պ. ԱՂԱՅԱՆ

ՌԱԶՐԿԱՍԻՏԻՃԱՆ ԿԱՆԿԵԱԳՆԵՐԻ ՀԱՃԱԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԵՎ ՏԱՏԱՆԵՐԱՆ
ՁԵՎԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՇՈՒՐՋԸ

Ա մ փ ո փ ո ս մ

Ուսումնասիրված են բազմաստիճան կանգնակների ծոման առանումները: Դիֆերենցիալ հավասարումների (1) սխեմեր, որոնց թիվը հավասար է ստորձանների թվին, տված (6) եզրային պայմանների և խզման դժերի վրա՝ անընդհառությամբ (7) պայմանների դեպքում լուծված է Կոփուվի ֆունկցիաների միջոցով (5): Ստացված են (14) և (16), սեկուրենտ բանաձևերը, որոնց միջոցով աշվիլ մեթոդով օպտիմալոր որոշվում են կանգնակի հաճախություններն ու տասանման ձևերը:

Որոշված են սեփական հաճախականություններն ու տասանման ձևերը 2 և 10 ստորձան ունեցող կանգնակների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тимошенко И. С. Колебания в инженерном деле. Физматгиз, 1959
2. Хачиш Э. Е. Некоторые прикладные задачи теории сейсмостойкости сооружений. Научные сообщения АНСМ, вып. 3, Ереван, 1963