

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Р. П. ДЖАВАХЯН, Э. Л. ДЖАВАДЯН

КРИВИЗНА ШАТУННЫХ КРИВЫХ

В технике все чаще применяются механизмы, основанные на свойствах шатунных кривых плоских четырехзвенных механизмов. В [1, 2] показано, что шатунные кривые могут быть использованы также для профилирования кулачков. В трехзвенных кулачковых механизмах шатунами кривыми можно профилировать участки профиля, соответствующие движению толкателя [2], а в шатуно-кулачковых механизмах — как участки, соответствующие выстоек толкателя [3, 4], так и весь профиль кулачка [1]. На рис. 1, а показана схема шатуно-

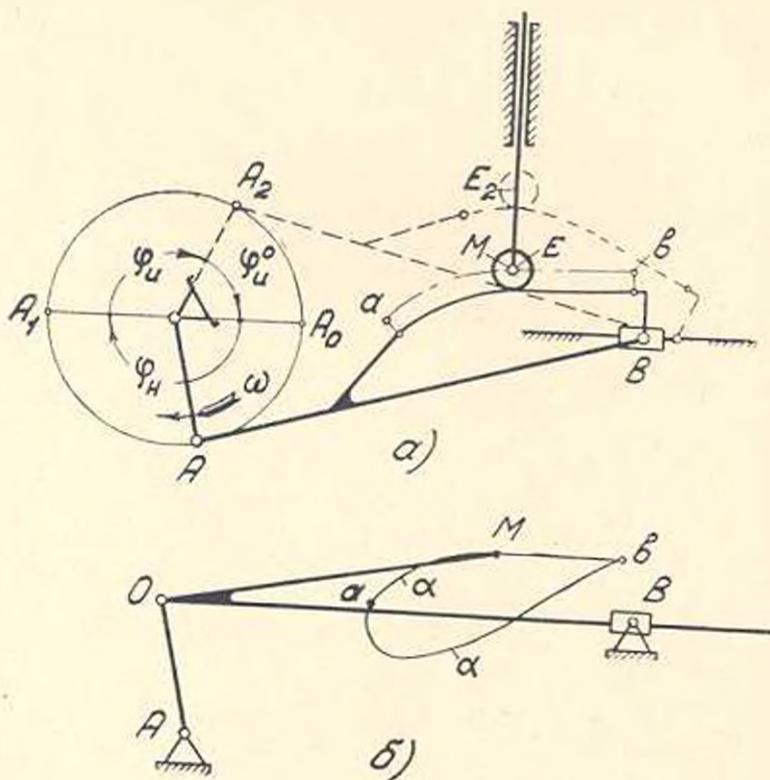


Рис. 1.

но-кулачкового механизма, в котором кулачок жестко связан с шатуном кривошипно-ползунного механизма и профилирован дугой  $ab$  шатунной кривой  $ax$  точки  $M$  обращенного кулисного механизма (рис.



окружности. Здесь и далее все линейные размеры механизмов отнесены к длине кривошипа (т. е. длина кривошипа  $OA = 1$ ). Подставляя значение  $MN' = d \cdot \cos(\alpha + \beta) - r$ , получим

$$\rho = \pm \frac{r^2}{d \cdot \cos(\alpha + \beta) - r}, \quad (2)$$

где  $d = PK$  — диаметр поворотной окружности,  $\alpha + \beta$  — угол, координирующий полярный луч точки  $M$  относительно нормали  $PK$  к центроидам. Нижний знак соответствует случаю, когда точка  $M$  находится вне поворотной окружности. Найдем значения параметров  $d$ ,  $\alpha$ ,  $r$  и  $\beta$ , входящих в формулу (2), для четырехзвенных механизмов. Для определения диаметра поворотной окружности необходимо найти ускорение мгновенного центра скоростей  $P$  шатуна  $AB$ , которое будет направлено по нормали  $PK$  к центроидам. Для удобства план ускорений построим из полюса  $P$  (рис. 2—4) в масштабе

$$\mu_a = \omega \cdot |\omega_1|, \quad (3)$$

где  $\omega = \text{const}$  и  $\omega_1$  — угловые скорости вращения кривошипа и шатуна. В рассмотренных механизмах принято  $\omega > 0$ ,  $r_1 = 1$ .

Векторный треугольник  $AOb$  представляет собой план повернутых скоростей (в масштабе  $\mu_v = \omega$ ). Легко убедиться, что при принятом масштабе (3) ускорение  $\bar{a}_A$  изображается вектором  $\overline{PA}$ , а ускорение  $\bar{a}_{B_A}^n$  вектором  $\overline{Ab}$  повернутой относительной скорости  $V_{BA}$  плана скоростей (так как  $\bar{a}_A = \omega^2 \cdot OA = \omega \cdot |\omega_1| \cdot AP$  и  $\bar{a}_{B_A}^n = \omega_1^2 \cdot AB = \omega \cdot |\omega_1| \cdot Ab$ ). Тогда для определения ускорения  $\bar{a}_B$  ползуна кривошипно-ползунного механизма (рис. 2) достаточно из точек  $P$  и  $b$  провести соответственно направления ускорений  $\bar{a}_B$  и  $\bar{a}_{B_A}^n$  до пересечения в точке  $b'$ . При принятом масштабе корнолисово ускорение в кулисном механизме (рис. 3) изображается вектором  $\overline{Pk} = 2 \cdot \overline{Ob}$  (так как  $a_k = 2 \cdot |\omega_1| \cdot \omega \cdot Ob$ ) и для нахождения ускорения точки  $B$  шатуна достаточно из точек  $b$  и  $k$  провести направления ускорений  $\bar{a}_{B_A}^n$  и  $\bar{a}_k$  до пересечения в точке  $b'$ . В шарнирном четырехзвезднике (рис. 4) для нахождения масштабного значения  $Pn$  ускорения  $\bar{a}_B^t$  нужно из точки  $b$  провести линию  $bn$  параллельно оси коллинеации  $PQ$ . В самом деле, имеем

$$Pn = \frac{\omega_2^2 \cdot R}{\omega \cdot |\omega_1|}, \quad (4)$$

где  $R$  и  $\omega_2$  — соответственно относительная длина и угловая скорость коромысла  $BC$ . Подставляя в (4) значение  $\omega_2 \cdot R = |\omega_1| \cdot PB$  и имея в виду, что  $\omega_2 : \omega = QO : QC = Qb : QB$ , получим  $Pn : PB = Qb : QB$ , следовательно,  $bn \parallel QP$ . Ускорение точки  $B$  находим, проведя из точек  $b$  и  $n$  соответственно направления касательных ускорений  $\bar{a}_{B_A}^n$  и  $\bar{a}_B^t$  до пересечения в точке  $b'$ . Ускорение полюса  $P$  можно найти методом подобия или же откладывая из точек  $a'$  и  $b'$  векторы  $\overline{a'p} = \overline{ap}$  и  $\overline{b'n_1} =$

$= \overline{bp}$  (рис. 2—4), изображающие в принятом масштабе (3) относительные ускорения  $\overline{a_{pA}^n}$  и  $\overline{a_{pB}^n}$  и проведя из точек  $p$  и  $n_1$  направления относительных касательных ускорений  $\overline{a_{pA}^t}$  и  $\overline{a_{pB}^t}$  до пересечения в точке  $p'$ . Нормаль к центроидам будет направлена по линии  $Pp'$ . Таким образом, масштаб (3) позволяет построить планы ускорений четырехзвенных механизмов без предварительного вычисления масштабных значений относительных нормальных и корнолисовых ускорений.

Значение угла  $\alpha$ , координирующего нормаль  $PK$  к центроидам относительно оси  $PO$  кривошипа, найдем из  $\Delta Ppp'$  (рис. 2—4). Имеем  $\operatorname{tg} \alpha = pp' / (pA + AP)$  или подставляя значения  $pp' = -AP|\varepsilon_1|/\omega_1$  и  $pA = -AP\omega_1/\omega$ , получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\varepsilon_1|}{\omega_1(\omega_1 - \omega)} \quad (5)$$

где  $\varepsilon_1$  — угловое ускорение шатуна. Эта формула связывает кинематические параметры движения шатуна четырехзвенного механизма с углом  $\alpha = \angle OPp'$  между кривошипом и нормалью к центроидам. Положение последней определяется поворотом вокруг полюса  $P$  против углового ускорения  $\varepsilon_1$  луча  $PO$  на угол  $\alpha < 180^\circ$ .

Диаметр поворотной окружности можно найти по известной формуле

$$d = \frac{a_p}{\omega_1^2}, \quad (6)$$

которая после подстановки значений  $a_p = \omega_1 \omega_1 \cdot Pp'$ ,  $Pp' = OP \cos \alpha$  и  $OP = 1 + \left| \frac{\omega}{\omega_1} \right|$  с учетом знаков угловых скоростей принимает вид

$$d = \frac{\omega}{\omega_1} \left( 1 - \frac{\omega}{\omega_1} \right) \frac{\operatorname{sign} \omega_1}{\cos \alpha}. \quad (7)$$

Значения параметров  $r$  и  $\beta$  находим из следующих выражений имея в виду, что  $\angle PAM = \pi - \delta + \varphi - \theta$  и  $AP = \left| \frac{\omega}{\omega_1} \right|$  (рис. 2);

$$r = \sqrt{q^2 + \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 + 2 \cdot q \cdot \left| \frac{\omega}{\omega_1} \right| \cdot \cos(\delta - \varphi + \theta)} \quad (8)$$

$$\sin \beta = \frac{q}{r} \cdot \sin(\delta - \varphi + \theta),$$

где  $\delta$  — угол наклона шатуна  $AB$ . Если положение точки  $M$  относительно шатуна определяется координатами  $x = AT = q \cdot \cos \theta$  и  $y = MT = q \cdot \sin \theta$  (рис. 4), то в формулы (8) подставляются значения  $q = \sqrt{x^2 + y^2}$  и  $\theta = \operatorname{arctg} y/x$ . Формулы (5) — (8) справедливы для кривошипно-ползунного, кривошипно-кулисного и четырехшарнирного

механизмов. По ним можно найти значения необходимых для определения радиуса кривизны шатунной кривой параметров  $\alpha$ ,  $d$ ,  $r$ ,  $\varphi$ , если известны кинематические параметры движения шатуна ( $\beta$ ,  $\omega_1$  и  $\varepsilon_1$ ). Однако, более целесообразно иметь формулы, связывающие эти параметры с параметрами схемы механизма. Выведем такие формулы для четырехзвенных механизмов.

**Кривошипно-ползунный механизм.** Обозначим относительные размеры механизма (при  $OA = 1$ ) соответственно через  $AB = \lambda$  и  $OC = e$ . Тогда из  $\triangle ABD$  (рис. 2) имеем

$$m = \sqrt{\lambda^2 - (e + \sin \varphi)^2}, \quad (9)$$

где  $\varphi$  — угол, определяющий положение механизма,  $m = DB$  — переменный параметр механизма. Найдем значения аналогов скорости ползуна  $s' = V_B \omega$  и угловой скорости шатуна  $\dot{\varphi} = \omega_2 \omega$ . Из рисунка имеем  $\dot{\varphi} = -OA/AP = -CD/DB$  или подставляя значения, получим

$$\dot{\varphi} = \frac{\omega_1}{\omega} = -\frac{\cos \varphi}{m}. \quad (10)$$

Из условия  $\triangle BbC \sim \triangle BAI$  имеем  $(OC + Ob):(CD + DB) = AI:DB$ , или подставляя значения  $Ob = s'$ ,  $CD = \cos \varphi$  и  $AI = e - \sin \varphi$ , получим

$$s' = \sin \varphi + \frac{e - \sin \varphi}{m} \cos \varphi. \quad (11)$$

Легко убедиться, что  $\triangle Ppp' \sim \triangle Bbb'$  и  $\angle bBb' = \alpha$ . Из рис. 2 следует, что точки  $P$ ,  $B$ ,  $b$  и  $b'$  лежат на окружности диаметра  $Bb'$ . Следовательно,  $\angle bBb' = \angle bPb' = \alpha$  и из  $\triangle bPF$  имеем  $\operatorname{tg} \alpha = PF/bF$ , или подставляя значения  $PF = PB - s' - e$ ,  $bF = CB = m + \cos \varphi$  и имея в виду, что

$$PB = -\frac{V_B}{\omega_1} = -\frac{s'}{\dot{\varphi}} \quad (12)$$

с учетом (10), (11) и знаков угловых скоростей получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(e + \sin \varphi) \cos \varphi - m^2 \operatorname{tg} \varphi}{m(m + \cos \varphi)} \cdot \operatorname{sign} \omega_1. \quad (13)$$

Формула (7) для определения диаметра поворотной окружности с учетом (10) принимает следующий вид

$$d = -\frac{m(m + \cos \varphi)}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{\operatorname{sign} \omega_1}{\cos \alpha}. \quad (14)$$

Значение диаметра  $d$  можно найти также по другому. Из условия  $\overline{V_B} \perp \overline{a_B}$  следует, что точка  $B$  принадлежит поворотной окружности, следовательно, полюс поворота  $K$  находится в точке пересечения направлений векторов  $\overline{a_P}$  и  $\overline{V_B}$ . Тогда из  $\triangle KPB$  имеем  $PB = d \cdot \sin(\varphi - \alpha)$ , откуда с учетом (10–12) получим

$$d = -\frac{e + \sin \varphi + m \cdot \operatorname{tg} \varphi}{\sin(\varphi - \alpha)} \cdot \operatorname{sign} \omega_1$$

Подставляя в (8) значения  $\cos \delta = -m/l$  и  $\sin \varphi = (e + \sin \varphi)/l$ , полученные из  $\triangle ABD$  с учетом (10), получим формулы

$$r = \sqrt{q^2 + \frac{2mq}{l \cdot |\cos \varphi|} \left[ \frac{m}{2q \cdot |\cos \varphi|} - m \cdot \cos(\varphi - \theta) - (e + \sin \varphi) \cdot \sin(\varphi - \theta) \right]}$$

$$\sin \beta = \frac{q}{r \cdot l} \cdot [m \cdot \sin(\varphi - \theta) + (e + \sin \varphi) \cdot \cos(\varphi - \theta)]$$

для определения значений мгновенного радиуса вращения  $r$  шатуновой точки  $M$  кривошипно-ползунного механизма и угла  $\beta$  — координирующего  $r$  относительно оси  $OP$  кривошипа.

**Кулисный механизм.** Для кулисного механизма значение угла  $\alpha$  найдем из  $\triangle bBb'$  (рис. 3). Имеем  $\operatorname{tg} \alpha = bb'/bB$  или подставляя значе-

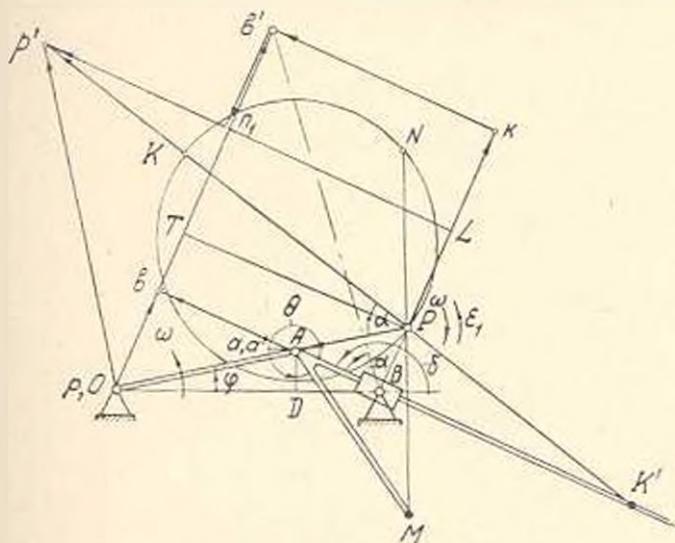


Рис. 3.

ние  $bb' = 2 \cdot OB + Tb = OT + Ob$  и имея в виду, что  $\angle OPT = \pi - \delta + \varphi$ , получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(\varphi - \delta) - \operatorname{tg} \delta. \quad (15)$$

Подставляя в (15) значение  $\operatorname{tg} \delta = -\sin \varphi / (f - \cos \varphi)$ , найденное из  $\triangle ABD$  после преобразований, получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(f^2 - 1) \cdot \sin \varphi}{(f - \cos \varphi)(f \cos \varphi - 1)},$$

где  $f$  — относительный размер стойки  $OB$ .

Из рис. 3 имеем  $\sin(\pi - \alpha) = AB/Ab = -AB/\cos(\delta - \varphi)$  или подставляя значения

$$\sin \delta = \frac{\sin \varphi}{n}, \quad \cos \delta = \frac{\cos \varphi - f}{n} \quad (16)$$

и

$$n = AB = \sqrt{1 + f^2 - 2f \cdot \cos \varphi} \quad (17)$$

найденные из  $\triangle OAD$ ,  $\triangle ABD$  и  $\triangle OAB$ , получим

$$\frac{\omega}{\omega_1} = \frac{1 - f^2 - 2f \cdot \cos \varphi}{1 - f \cdot \cos \varphi} \quad (18)$$

Формула (7) для определения диаметра поворотной окружности с учетом (20) принимает вид:

$$d = \frac{f(\cos \varphi - f)(1 + f^2 - 2f \cos \varphi)}{(1 - f \cos \varphi)^2 \cos \alpha} \operatorname{sign} \omega_1$$

Из условий  $\triangle Pp'L \sim \triangle PK'B$  и  $\triangle ObA \sim \triangle ABP$  имеем  $PK' : Pp' = PB : PL = PB : Ob = AP : AO = |\omega : \omega_1|$ , или имея в виду, что  $Pp' = a_p / |\omega| |\omega_1|$  с учетом (6), получим  $PK' = d$ . Однако, точка  $K'$  не является полюсом поворота, так как  $\overline{PK'} \perp \overline{a_p}$ . Точку  $K$  можно найти из условия  $\overline{PK} = -\overline{PK}'$ . Формулы (8) для определения параметров  $r$  и  $\beta$  с учетом (16)–(18) принимают вид

$$r = \sqrt{q^2 + \frac{2 \cdot q \cdot n}{|f \cdot \cos \varphi - 1|} \left| \frac{n^2}{2q |f \cos \varphi - 1|} + \cos \theta - f \cos (\varphi - \theta) \right|}$$

и

$$\sin \beta = \frac{q}{r \cdot n} \cdot [\sin \theta + f \cdot \sin (\varphi - \theta)]$$

где значение параметра  $n$  определяется по формуле (17).

**Шарнирный четырехзвеник.** Из рис. 4 следует, что точки  $n$ ,  $B$ ,  $b$ , и  $b'$  лежат на окружности диаметра  $Bb'$ . Следовательно,

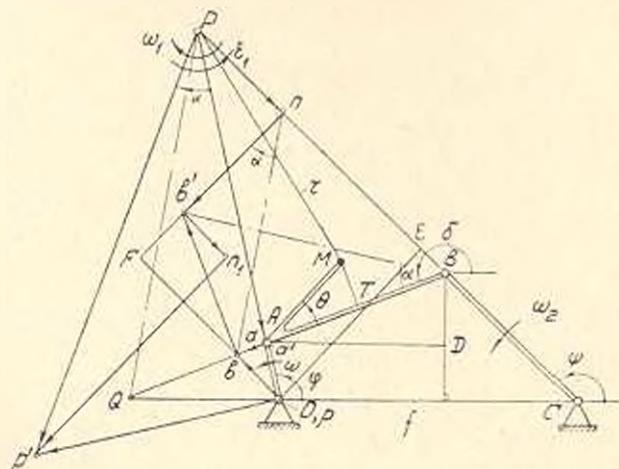


Рис. 4.

$\angle bnb' = \angle BBb' = \alpha$  и из  $\triangle Fnb$  имеем  $\operatorname{tg} \alpha = Fb / \Gamma n$ , или подставляя значения  $Fb = PE = Ob = Pn$ ,  $PE = OE \operatorname{ctg} (\psi - \tau)$ ,  $Ob = \omega_2 R / \omega$  и  $\Gamma n = OE = f \cdot \sin \tau$  с учетом (4) и знака  $\omega_1$ , получим



## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Hain K.* Systematik und Umlauffähigkeit drei und mitgliedriger Kurvengetriebe. *Konstruktion*, 19, 10, 1967.
2. *Janssen B.* Symmetrisch Koppelkurve als Nockenprofil. *Industrie-Anzeiger*, 89, 34-1967.
3. *Джаваян Э. Л.* Шатунно-кулачковый механизм с большим углом размаха ведомого звена. *Изв. АН Арм. ССР, серия технических наук т. XXI*, 5, 1968.
4. *Черкудинов С. А.* Некоторые приложения метода обращения движения. *Труды семинара по ТММ*, т. 6, вып. 24, 1949.
5. *Артоболевский И. И.* Кривизна линейно огибающих шатуновых кривых. *Труды семинара по ТММ*; вып. 94, 1963.
6. *Kraus R. A.* Koppelkurvenbahnen, Berechnung der Krümmungshalbmesser und Spitzen beim Gelenkviereck. *Konstruktion*, 13, 2, 1961.
7. *Lichtenheldt W.* Zur Krümmung der Bahnen von Koppelpunkten. *„Wiss z. Techn. Univ. Dresden“*, 10, 6, 1961.
8. *Баранов Г. Г.* Курс теории механизмов и машин. Изд. „Машиностроение“, М., 1967.