

Д. О. АВЕТИСЯН

ЭКВИЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ СТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Геометрическое место точек, обладающих одинаковой плотностью энергии, а следовательно, и одинаковой величиной напряженности поля условимся называть эквиэнергетической поверхностью. Получение аналитических выражений для эквиэнергетических поверхностей связано с большими трудностями, обусловленными в первую очередь тем обстоятельством, что энергия поля, являющегося суммой нескольких полей, вообще говоря, не равна сумме энергий слагаемых полей [1]. В поле двух точечных зарядов свойством аддитивности обладают лишь точки, принадлежащие шару аддитивности, диаметром которого служит промежуток линии, соединяющей точки нахождения зарядов. Во всех остальных точках плотность энергии суммарного поля одноименных зарядов больше или меньше суммы энергий полей в зависимости от того находится ли точка наблюдения вне или внутри шара аддитивности. В поле трех точечных зарядов поверхность шара аддитивности вырождается в две точки, лежащие по обе стороны плоскости зарядов. В случае четырех и более точечных зарядов наличие точек аддитивности принципиально исключается.

Построим эквиэнергетические поверхности для относительно простого, плоскопараллельного поля, созданного в пустоте двумя бесконечно длинными заряженными цилиндрическими проводниками, заряд которых на единицу длины обозначим τ . Общеизвестно, что вне проводников такое поле можно заменить полем двух линейных зарядов, лежащих тем ближе к осям цилиндрических проводников, чем больше отношение межосевого расстояния к диаметру проводников.

Уравнение следов эквиэнергетических поверхностей на плоскости, перпендикулярной к осям проводников, определяется из условия [2]

$$W = 0,5 \varepsilon_0 \cdot E_p^2 = 0,5 \varepsilon_0 (E_1^2 + E_2^2 + 2 \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2) = \text{const.} \quad (1)$$

Отсюда, для разноименных зарядов

$$r_1 r_2 = AR = kR^2; \quad (2)$$

для одноименных зарядов

$$r_1 r_2 = A^2 = k^2 R^2. \quad (3)$$

где r_1 и r_2 — расстояния от точки наблюдения до линейных зарядов;

ρ — расстояние точки наблюдения от начала координат (рис. 1, 2);

$2R$ — расстояние между заряженными линиями;

K и $\gamma = \frac{1}{R}$ — безразмерные коэффициенты пропорциональности.

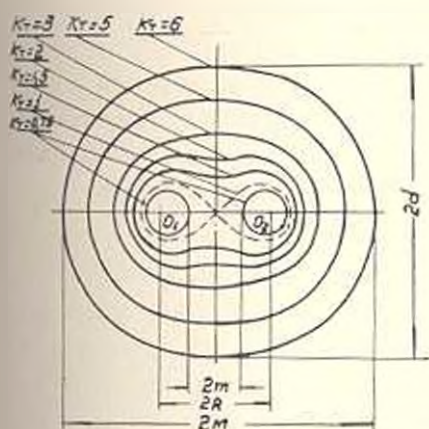


Рис. 1.

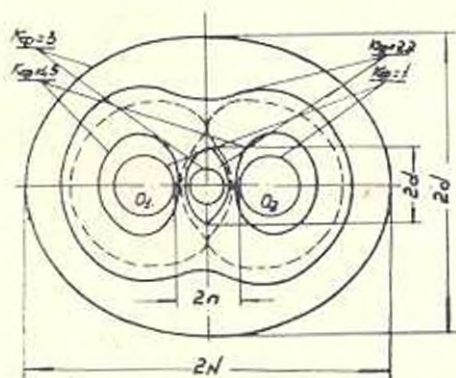


Рис. 2.

Очевидно, что семейства кривых (2) и (3) будут симметричными относительно осей координат. Эквипотенциальные поверхности не могут иметь точки пересечения. Для получения кривой (2) при заданном значении K_T проводим семейство эллиптических окружностей с различными ρ_1 с центром в точке O_1 , а также окружность радиусом $\rho_2 = \frac{K_T \cdot R^2}{\rho_1}$ с центром в точке O_2 , после чего определяем точки пересечения, принадлежащие кривой (2). На рис. 1 приведено семейство кривых для различных значений

$$K_T = \frac{\gamma}{R \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{1}{(E_p)_T}.$$

Для определения точек пересечения этих кривых с осью ординат пользуемся условиями:

$$\rho_1 \rho_2 - \rho_1^2 = \rho_2^2;$$

$$\rho_1^2 = R^2 + d^2.$$

Отсюда найдем $d_T = R \sqrt{K_T - 1}$. При $K_T < 1$ кривые (2) не имеют точки пересечения с осью ординат и каждому K_T соответствует уже не одна замкнутая кривая как и случаях $K_T > 1$, а две. При этом, однако, увеличивается количество точек пересечений кривой (2) с осью абсцисс. Действительно, чтобы определить точки пересечения кривой (2) с осью абсцисс, пользуемся следующими условиями.

Для определения M

$$\rho_2 = 2R + \rho_1; \quad \rho_2 = \frac{K_T R^2}{\rho_1}.$$

Отсюда $\rho_1 = -R + R\sqrt{1+K_T}$; $M = R + \rho_1 = R\sqrt{1+K_T}$.

Для определения m :

$$\rho_2 = 2R - \rho_1; \quad \rho_2 = \frac{K_T \cdot R^2}{\rho_1}.$$

Отсюда $\rho_1 = \frac{R}{K_T} = R\sqrt{1-K_T}$; $m = R - \rho_1 = R\sqrt{1-K_T}$.

т. е. точки, отвечающие m , могут существовать только при $K_T \leq 1$. В соответствии с этим, при разноименных зарядах каждому значению $0 \leq K_T \leq 1$ соответствует двухсвязанная, а при $1 < K_T < \infty$ односвязанная эквиэнергетические поверхности. Заметим, что величина

$$L_T \cdot W_T = \frac{e^2}{2R^2 \epsilon_0} \cdot \frac{L_T}{K_T^2},$$

где L_T — длина кривой, соответствующей K_T , достигает максимума при условии $K_T = 1$. Проверка этого условия была осуществлена приближенно только графически. Строгое доказательство возможно осуществить лишь при наличии аналитической зависимости $L_T = f(K_T)$ в явном виде.

Для построения кривой (3) при заданном значении K_Φ , с центром в начале координат проводим семейство окружностей с радиусами $\rho_1 = R \frac{K_T}{K_\Phi}$, соответствующих различным значениям K_T . Точки пересечения окружности радиуса ρ_1 с кривой (2) с коэффициентом пропорциональности $K = K_T$ будут принадлежать эквиэнергетическим поверхностям при одноименных зарядах. Для определения точек пересечения кривых (3) с осью ординат при заданном K_Φ пользуемся уравнением:

$$d = \rho_1 - R\sqrt{K_T - 1} = R \frac{K_T}{K_\Phi}. \quad (4)$$

Откуда получим

$$d_\Phi = R \cdot K_\Phi \left[\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{K_\Phi}\right)^2} \right].$$

Следует учесть, что при одноименных зарядах каждому значению $0 < K_\Phi \leq 2$ соответствует пара одинаковых, симметрично по отношению вертикальной оси расположенных кривых, длина которых растет с ростом K_Φ . При переходе через значение $K_\Phi = 2$ эти кривые претерпевают качественные изменения, в результате чего образуются новые пары несимметричных и не похожих друг на друга кривых. Длина одной из кривых растет, а другой уменьшается с дальнейшим ростом K_Φ в пределах

$$2 < K_\Phi < \infty.$$

При значениях $K_\Phi < 2$ кривые (3) не имеют общих точек с осью ординат. Для определения точек пересечения кривых (3) с осью абсцисс при заданном значении K_Φ пользуемся уравнением:

$$\frac{K_7}{K_\Phi} = \sqrt{1 - K_\Phi^2},$$

где знаку плюс на рис. 2 соответствует интервал A , а минусу — n .

Поэтому учитывая, что $r = R \frac{K_7}{K_\Phi}$, получим:

$$N = R \cdot K_\Phi \left[\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{K_\Phi}\right)^2} \right];$$

$$n = R \cdot K_\Phi \left[-\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{K_\Phi}\right)^2} \right].$$

Эти уравнения сохраняют силу на всем интервале значений

$$0 < K_\Phi < \infty.$$

Полученные результаты можно отнести также к случаю магнитных полей, созданных в вакууме двумя параллельными линиями тока бесконечной длины. Действительно, заменив во всех выражениях ϵ_0 на μ_0 , а E_p на B_p , кривые, представленные на рисунках 1 и 2, можно отождествить с эквипотенциальными поверхностями в магнитном поле, причем, случаю одинаковой направленности токов аналогичен случай одноименных заряженных тел.

Резюмируя изложенное, отметим, что рассмотренный в статье графический способ построения следов эквипотенциальных поверхностей плоских параллельных электрических и магнитных статических полей позволяет относительно легко определить участки, где значения напряженности поля достигают максимума. Отмечается идентичность эквипотенциальных поверхностей электрического поля бесконечных заряженных проводников и магнитного поля параллельных линий тока бесконечной длины. Такая аналогия позволяет моделировать магнитное поле электрическим и наоборот [3].

Поступило 30.XII.1967.

Գ. Ն. ԱԼԵՏԻՍՅԱՆ

ԷԼԵԿՏՐՈՆԱՆ ԵՎ ՄԱԳՆԻՏՈՒԿԱՆ ՍՏԱՏԻԿ ՊԵՇՏՆԵՐԻ ԷԿՎԻՍՊՈՏԵՆՑԻԱԿԱՆ ՄԱԿԵՐԵՎՈՒՅԹՆԵՐԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Հետազոտված են լիցքավորված երկու երկար հաղորդալարերով ստեղծված հարթ-դաշտի և չեկավորությունների դաշտի էլեկտրական մակերևույթները: Արտաքինում է հարթության վրա էլեկտրական մակերևույթների հետքերի հաշվառումը և դրանց կառուցումով ուսումնասիրված են ալի մակերևույթների հատկությունները հաղորդալարերի համառուն ու տարանուն

լիցքավորման դեպքում: Նշվում է, որ ստացված լուծումը կարելի է ստորաձևերկու դուրանհեղ հասանալու հաղորդիչներով ստեղծվող մաղնիսական դաշտի վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Тамм И. Е. Основы теории электричества. М., 1956.
2. Говорков В. А. Электрические и магнитные поля. М., 1960.
3. Тетельbaum Н. М. Электрическое моделирование. М., 1959.