

ЭНЕРГЕТИКА

Д. С. МЕЛКОНЯН

МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
 ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-СИНУСОИДАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В статье предлагается численный метод аппроксимации динамической характеристики $f(x)$ рядом, составленным из экспоненциально-синусоидальных функций следующего вида

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \exp\left(-2^{k-1} \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(2^{k-1} \frac{\pi x}{L}\right), \quad (1)$$

исходя из условия

$$q(x_i) = f(x_i), \quad (2)$$

где $x_i = \frac{L}{2^i}$ $[i = 0, 1, \dots]$ — узловые точки;

L — отрезок, на котором задана динамическая характеристика.

Рассмотрим, как определить коэффициенты Q_k , чтобы условие (2) было выполнено. При $x = L$

$$q(L) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \exp(-2^{k-1} \pi) \sin(2^{k-1} \pi) = Q_0 \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

откуда с учетом (2) следует

$$Q_0 = f(L) \exp \frac{\pi}{2}. \quad (3a)$$

В общем случае при $x = \frac{L}{2^i}$ ($i \geq 1$) на основании (1)

$$q\left(\frac{L}{2^i}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k \exp(-2^{k-i-1} \pi) \sin(2^{k-i-1} \pi),$$

и, следовательно, с учетом (2)

$$Q_i = \exp \frac{\pi}{2} \left[f\left(\frac{L}{2^i}\right) - \sum_{k=0}^{i-1} Q_k \exp(-2^{k-i-1} \pi) \sin(2^{k-i-1} \pi) \right]. \quad (3b)$$

Формулы (3a) и (3b) решают поставленную задачу, позволяя определять коэффициенты ряда (1) Q_i в порядке возрастания индекса i .

Чтобы не быть связанными при нахождении коэффициентов определенной последовательностью, приведем формулы (3а) и (3б) к виду:

$$Q_i = \sum_{j=0}^i \xi_j f\left(\frac{L}{2^{i-j}}\right), \quad (4)$$

где ξ_j — постоянные коэффициенты.

Из формул (3) и (4) для ξ_0 непосредственно следует

$$\xi_0 = \exp\left(\frac{\pi}{2}\right). \quad (5a)$$

Раскрывая формулы (3б), можно получить следующее выражение при $j \geq 1$:

$$\xi_j = -\exp\left(\frac{\pi}{2}\right) \sum_{m=0}^{j-1} \xi_m \exp(-2^{m-j-1}\pi) \sin(2^{\pi-j-1}\pi). \quad (5б)$$

Значения коэффициентов ξ_j , вычисленные при помощи ЭЦВМ „Наирн“ для j от 0 до 20, приведены в табл. 1.

Таблица 1

j	ξ_j	j	ξ_j	j	ξ_j
0	4,81018	7	-0,18453	14	0,00123
1	-7,46049	8	0,09024	15	-0,00060
2	5,59079	9	-0,04113	16	0,00030
3	-3,10677	10	0,02158	17	-0,00014
4	1,56595	11	-0,01055	18	0,00007
5	-0,77057	12	0,00516	19	-0,00003
6	0,37727	13	-0,00252	20	0,00002

Руководствуясь формулой (4) и табл. 1, можно с помощью несложных вычислений решать задачу аппроксимации рядом (1). Отметим следующие свойства ряда (1), важные для его практического использования. При $x=0$ $q(x)=0$. Поэтому аппроксимируемая кривая, заданная на отрезке от 0 до L , должна быть смещена в точке $x=0$ с началом координат. Оставив в выражении (1) $n+1$ первых членов, получаем следующий усеченный ряд

$$q_n(x) \approx \sum_{k=0}^n Q_k \exp\left(-2^{k-1} \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(2^{k-1} \frac{\pi x}{L}\right). \quad (6)$$

Если коэффициенты Q_k определяются по формулам (3) и (4), то

$$q_n(x) = f(x) \text{ при } x_i = \frac{L}{2^i} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \quad (7)$$

Благодаря этому для конкретных задач аппроксимации вместо бесконечного ряда (1) можно применять конечный ряд (6), который совпадает с аппроксимируемой функцией на отрезке $\left[\frac{L}{2^n}; L\right]$ в точках $\frac{L}{2^i}$ ($i = 0, 1, \dots, n$).

Составим ряд

$$q_m(x) = q_n(x) + q_{m-n}(x),$$

где $q_n(x)$ определяется формулой (6), а

$$q_{m-n}(x) = \sum_{k=0}^{m-n-1} Q_k \exp\left(-2^{k+1} \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(2^{k+1} \frac{\pi x}{L}\right), \quad (m > n).$$

Нетрудно убедиться, что

$$q_m(x) = q_n(x) \quad \text{при} \quad x = \frac{L}{2^k} \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

то-есть коэффициенты рядов $q_m(x)$ и $q_n(x)$ тождественно совпадают при $k \leq n$. Таким образом, добавление к ряду (6) новых членов не меняет значений, входящих в него коэффициентов.

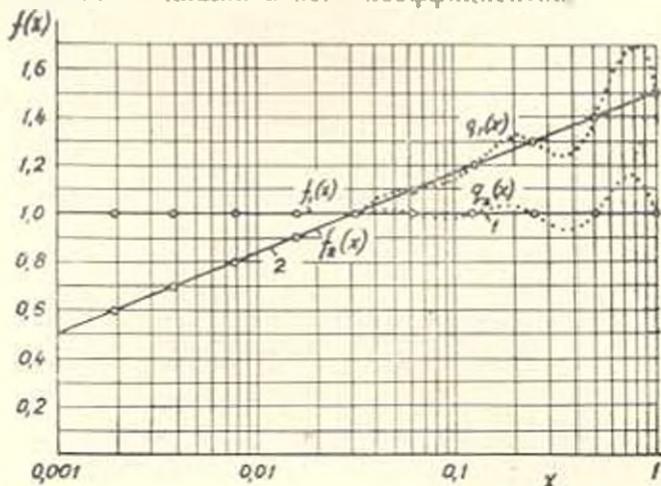


Рис. 1. Характер аппроксимации, обеспечиваемой рядом вида (6).

Характер аппроксимации, обеспечиваемый рядом вида (6), лучше всего уяснить с помощью конкретного примера. На рис. 1 сплошными линиями 1 и 2 показаны функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ (функция $f_1(x) = 1$) и точечными кривыми аппроксимирующие их функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$, определяемые рядами вида (6) из 11 членов. По оси абсцисс взята логарифмическая шкала, в которой отрезок $L = 1$ делится узловыми точками $x = \frac{L}{2^i}$ ($i = 0, 1, \dots, 10$) на равные части. В узловых точках функции $f_1(x)$ и $q_1(x)$ и соответственно $f_2(x)$ и $q_2(x)$ совпадают (значения кривых и узловых точек показаны на рис. 1 кружками). В промежуточных же точках при x , близких к L , функции $q_1(x)$ и $q_2(x)$ колеблются около $f_1(x)$ и $f_2(x)$, но затем по мере уменьшения x колебания затухают и функции практически совпадают. Как видно из рисунка, аппроксимирующие функции $q_n(x)$ обеспечивают плавное соединение узловых точек, начиная примерно с $L/2^4$.

Чтобы аппроксимирующая функция (6) обеспечивала плавное соединение узловых точек на всем отрезке аппроксимации, поступим следующим образом. Искусственно продолжим аппроксимируемую функцию за пределы отрезка L , допустив, что

$$f(L) = f(2L) = f(4L) = \dots = f(2^m L), \quad (8)$$

где m — некоторое целое положительное число, и составим ряд

$$s_n(x) = \sum_{k=-m}^n S_k \exp\left(-2^{k-1} \frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(2^{k-1} \frac{\pi x}{L}\right) \quad (9)$$

с такими коэффициентами S_k , чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned} S_n(x_i) &= f(x_i) \text{ при } i = 1, \dots, n; \\ S_n(x_i) &= f(L) \text{ при } i = -m, \dots, -1, 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Ряд (9) полностью аналогичен ряду (6), если рассматривать аппроксимацию на отрезке $[0, 2^m L]$. Но, поскольку $S_n(x)$ используется для аппроксимации на отрезке $[0, L]$, дополнительные члены ряда с коэффициентами S_{-m}, \dots, S_{-1} смещают колебания, показанные на рис. 1, за пределы отрезка $[0, L]$. Сравнивая ряды (6) и (9), можно убедиться, что формула (4) должна быть видоизменена следующим образом для определения коэффициентов S_k :

$$S_k = \sum_{j=0}^{m-k} \eta_j f\left(\frac{L}{2^{m-k-j}}\right). \quad (11)$$

С учетом условия (8) коэффициенты S_k для $k = -m, \dots, -1, 0$ могут быть представлены в виде

$$S_k = f(L) \sum_{j=0}^{m-k} \xi_j = f(L) \tau_{m-k}. \quad (12)$$

Некоторые значения коэффициентов τ_{m-k} приведены в табл. 2.

Таблица 2

$m-k$	τ_{m-k}	$m-k$	τ_{m-k}	$m-k$	τ_{m-k}
0	4,81018	3	0,16599		1,00666
1	-2,65601	4	1,39996		0,82213
2	2,91078	5	0,62939		0,91237

2. Динамические характеристики, в особенности это относится к частотным характеристикам, в ряде случаев изображаются в логарифмических координатах. Узловые точки x_i , полученные в соответствии с равенством (2), делят логарифмическую шкалу на равные отрезки, и, следовательно, функция $S_1(x)$, образуемая рядом вида (9), соединяет равноотстоящие ординаты логарифмической характеристики. Благодаря этому, предложенный метод весьма удобен именно для аппроксимации кривых, изображенных в координатах, имеющих лог. ТН, № 5.

гарифмическую шкалу по оси абсцисс (по оси ординат может быть как равномерная, так и логарифмическая шкала).

В качестве примера рассмотрим аппроксимацию амплитудной и фазовой частотных характеристик системы регулирования [1], изображенных на рис. 2. Характеристики заданы на отрезке частот от 0,1 до 100 рад/сек. Значения частотных характеристик в узловых точках, соответствующих частотам $\omega = 100; 50; 25; 12,5; 6,25; 3,125; 1,563; 0,781; 0,391; 0,195; 0,0977$, показаны на рис. 2 кружками. По этим зна-

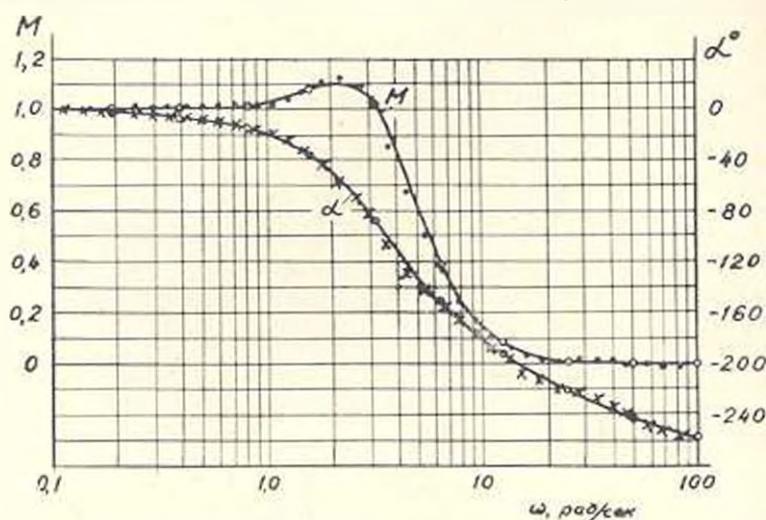


Рис. 2. Аппроксимация амплитудной M и фазовой α частотных характеристик рядом вида (9).

чениям были рассчитаны коэффициенты рядов вида (9) при $m = 4$ аппроксимирующих функции α и $1 - M$. Ниже приведены значения коэффициентов этих рядов.

Для функции α

k	S_k	k	S_k	k	S_k	k	S_k
-4	1230	0	358	4	46,1	8	3,44
-3	-678	1	98,6	5	-71,1	9	-12,7
-2	753	2	191	6	-4,99	10	5,77
-1	-42,5	3	93,2	7	7,67		

Для функции $1 - M$

k	S_k	k	S_k	k	S_k	k	S_k
-4	4,81	0	1,4	4	-0,384	8	0,211
-3	-2,65	1	0,629	5	-1,56	9	-0,0818
-2	2,94	2	0,983	6	1,35	10	0,0327
-1	-0,166	3	0,499	7	-0,563		

Значения рядов вида (9) с приведенными выше коэффициентами, вычисленные для отдельных частот, показаны на рис. 2 крестиками и точками. Они близки к исходным кривым или совпадают с ними.

3. Хорошо известно, что переходные функции линейных систем, передаточные функции которых имеют только простые вещественные полюса, в общем случае содержат постоянную составляющую и сумму слагаемых вида $A_k e^{-t/\tau_k}$. Такие функции быстро изменяются при t , близких к нулю и медленно затухают при $t \rightarrow \infty$. Ряд (9) удобен для аппроксимации таких функций, так как его узловые точки сгущаются по мере приближения к $t = 0$. Его целесообразно применять в тех случаях, когда переходная функция не имеет точек перегиба между узловыми точками.

Резюмируя отметим, что рассмотренный метод позволяет с помощью несложных вычислений, руководствуясь данными таблиц 1 и 2, аппроксимировать динамические характеристики рядами вида (1), (6) или (9). Предпочтительнее использовать ряд (9), так как он обеспечивает плавное соединение узловых точек. Узловые точки, в которых аппроксимируемая и аппроксимирующая функции совпадают, располагаются неравномерно. Благодаря этому, рассмотренный метод удобен для аппроксимации кривых, изображенных в логарифмических координатах, а также функций, состоящих из суммы экспоненциальных составляющих. Функции, определяемые рядами (1), (6) и (9), непрерывны, имеют производные любых порядков. Поэтому предложенный метод можно использовать для целей численного дифференцирования и интегрирования, в частности, для того, чтобы вычислить преобразования Лапласа или Фурье заданной эмпирически динамической характеристики.

АрмИИЭ

Поступило 7.V.1969.

Գ. Ս. ՄԵԼՔՆՅԱՆ

ԴԻՆԱՄԻԿ ԲՆՈՒԹԱԿՐԵՐԸ ԷՔՍՊՈՆԵՆՑԻԱԼ-ՍԻՆՈՒՍՈՒԴԱՅԻՆ
ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐԸ ԽՈՏԱԿՆԵԼՈՒ ԿՐՈՏԱԿՆԵՐԸ

Ա Վ Փ Ո Ւ Ո Ւ Մ

Առաջարկվում է դինամիկ բնութագրերը կրող օնենցիալ-սինուսոիդային ֆունկցիաներից կազմված շարքով մոտարկելու մեթոդ: Շարքի գործակիցներն բնորոշում են այնպես, որ մոտարկվող և մոտարկող ֆունկցիաները համընկնում են հանգուցային կետերում: Ստամնասիրված են շարքի հատկությունները և վերջինիս գործակիցների հաշվումը հեշտադնելու նպատակով բերված են աղյուսակներ: Սեթոդի կիրառումը լուսարանված է օրինակով:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Лэнинг Д. Х., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. М., 1968.
2. Честнат Г., Майер Р. В. Проектирование и расчет следящих систем и систем регулирования. М., 1959.