

А. А. КАСАМАНЯН

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЯХ ЗВЕНЬЕВ
 ТРЕХЗВЕННОГО МЕХАНИЗМА ОБЩЕГО ВИДА
 С СОПРИКАСАЮЩИМИСЯ ШАРОМ И ПЛОСКОСТЬЮ

1. В статье излагается точный графо-аналитический метод определения перемещений звеньев механизма, кинематическая схема которого приведена на рис. 1. Частные случаи этого механизма нашли применение в некоторых приборах [1].

Принятые обозначения: A, r — центр и радиус шара 1; $AE = a_1$ — кратчайшее расстояние точки A от оси OE цилиндрической пары 1—3; M — точка касания шара 1 и плоскости 2 (далее плоскость 2 обозначена через Π_1); α_2 — угол между плоскостью Π_0 и осью FD цилиндрической пары 2—3, определяемый углом между прямой BC и осью DF ; C — точка пересечения плоскости Π_0 и оси FD ; $BD = a_2$ — кратчайшее расстояние точки B от оси FD ; $OF = a_3$ и α_1 — соответственно кратчайшее расстояние и угол между осями OE и DF ;

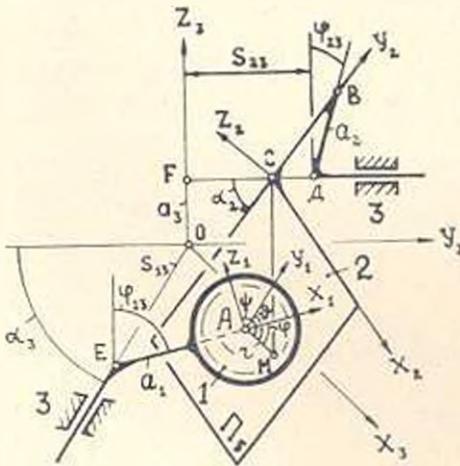


Рис. 1.

$OE = s_{21}$ и φ_{21} — соответственно кратчайшее расстояние и угол между отрезками a_1 и a_2 ; $FD = s_{32}$ и φ_{32} — соответственно кратчайшее расстояние и угол между отрезками a_2 и a_3 ; X_i, Y_i, Z_i — прямоугольная правая система координат, связанная со звеном i ($i = 1, 2, 3$); x_i, y_i, z_i — координаты произвольной точки в системе X_i, Y_i, Z_i ; φ, θ, ψ — углы, образованные отрезком AM соответственно с осями X_1, Y_1, Z_1 ; θ — линейный угол между плоскостями EAM и AMC ; Π_1, Π_0, Π_3 — плоскости, проведенные соответственно через точки O, D, E и перпендикулярные отрезкам OF, FD, OE ; Π_2 — плоскость, проведенная через точки B, C, D ; A_p, B_p и т. д. — проекции точек A, B и т. д. на плоскости Π_p ($p = 1, 2, 3, 4, 5$); X_{pq} — линия (ось) пересечения взаимно-перпендикулярных плоскостей Π_p и Π_q ; A_{pq}, B_{pq} и т. д. — проекции точек A, B и т. д. на ось X_{pq} . Оси AX_1, CY_2, OZ_3 направлены соответственно по EA, CB, OF .

Оси AM_1 и OV_3 проведены соответственно параллельно EO и FD , а ось CZ_3 перпендикулярна плоскости Π_3 . Положение (перемещение) звена 1 относительно неподвижного звена 3 определяется параметрами s_{13} и φ_{13} . Положение звена 2 относительно звена 3 определяется параметрами s_{23} и φ_{23} . Положение звена 1 относительно звена 2 определяется координатами x_2^A, y_2^A, z_2^A точки A , углом θ и двумя из углов φ, θ, ψ . Из рис. 1 следует, что $x_2^A = x_2^M, y_2^A = y_2^M$ и $z_2^A = r$. Механизм данного вида обладает тремя степенями подвижности, и потому среди его переменных параметров независимыми могут быть три параметра.

Даны независимые переменные $\varphi_{13}, s_{13}, s_{23}$; постоянные параметры $a_1, a_2, a_3, z_0, z_3, r$. Нужно определить переменные $\varphi_{23}, \varphi, \theta, \psi, \theta$ и координаты $x_2^M, y_2^M, x_3^M, y_3^M, z_3^M$ точки M .

Сущность метода решения задачи заключается в следующем. Искомый параметр φ_{23} переносится в число заданных, а известный параметр r — в число искомых, т. е. производится некоторая перемена заданных параметров. Строятся ортогональные проекции точек кинематической схемы механизма в новых заданных параметрах последовательным применением способа перемены плоскостей проекции. На основе этих построений выводятся аналитические выражения искомых параметров $\varphi_{23}, \varphi, \theta, \psi, \theta$ механизма и координат точки M . Схема ортогональных проекций точек механизма, построенная в новых заданных параметрах, не является графическим решением данной задачи. Этим и отличается изложенный выше метод от графо-аналитического метода Г. Д. Анапова [2]. Первый из этих методов целесообразно применять в тех случаях, когда графическое решение задачи получается сложным и трудоемким.

2. Очевидно, что отрезки EO, BD, AE лежат соответственно в плоскостях Π_1, Π_2, Π_3 и $\Pi_3 \perp \Pi_1, \Pi_2 \perp \Pi_1, \Pi_4 \perp \Pi_2, \Pi_5 \perp \Pi_4, OF \parallel (\Pi_2 \text{ и } \Pi_3), FD \perp \Pi_1, AM \parallel \Pi_4$. Согласно этому и вышепринятым обозначениям можно написать: $a_1 = A_3E_3, a_2 = B_3D_3, a_3 = E_3F_3, s_{13} = OE_1, s_{23} = OD_1, r = A_3M_1, \varphi_{13} = \angle A_3E_3F_3, \varphi_{23} = \angle Z_3D_3B_3, \alpha_3 = \angle V_3OE_1, \theta = \angle E_3A_3C_3, z_3 = B_3C_3D_3$.

Проводим оси OX_3 и OY_3 (рис. 2). По углу α_3 и отрезку s_{13} находим точку E_1 . Ось X_{13} проходит через точку E_1 и перпендикулярна отрезку OE_1 , так как плоскость $\Pi_3 \perp s_{13}$ проведена через точку E . Совмещаем плоскость Π_3 с плоскостью Π_1 поворотом ее вокруг оси X_{13} . Проекция E_3 совпадает с E_1 , так как точка E лежит в плоскостях Π_1 и Π_3 . Точка F_3 находится на продолжении отрезка OE_1 на расстоянии a_3 от оси X_{13} . По углу φ_{13} и отрезку a_1 находим точку A_3 . Опуская перпендикуляр из точки A_3 на ось X_{13} , получим проекцию A_1 , так как точка A лежит в плоскости Π_3 .

Откладывая отрезок s_{23} из точки O на оси OY_3 , получим проекцию D_1 . Ось X_{23} проходит через точку D_1 и перпендикулярна отрезку OD_1 , так как плоскость $\Pi_2 \perp s_{23}$ проведена через точку D . Ось X_3

ный отрезок A_1M_1 изображает искомый параметр r в натуральную величину. Проекция M_1 находится на том же расстоянии от оси X_{21} , что и проекция A_2 , так как $AM \perp \Pi_1$. По точкам M_1 и M_2 находим проекции M_1' и M_2' . Отрезки OM_{12} , $M_{12}M_1$, $M_{12}M_2$ изображают соответственно координаты x_2'' , y_2'' , z_2'' точки M в неподвижной системе $X_1Y_1Z_1$. Ось AU_1 в плоскости Π_1 изображается осью A_1Y_1 . Отрезок A_1M_{12} дает координату y_1'' . Если повернуть плоскость MAU_1 вокруг оси AU_1 до положения, параллельного плоскости Π_1 , то проекция M_1 перейдет в положение M_1' , где $M_1M_1' \perp A_1Y_1$ и $A_1M_1' = r$. Полученный при этом угол $M_1'A_1Y_1$ изображает угол ψ без искажения.

В плоскости Π_1 через точку A_2 проводим оси X_1 и Z_1 . Если повернуть плоскость $MA X_1$ вокруг оси $A X_1$, а плоскость $MA Z_1$ — вокруг оси $A Z_1$, и совместить их с плоскостью Π_1 , то проекция M_1 займет соответственно положения M_2' и M_3' , где $M_2M_2' \perp A_2X_1$, $M_3M_3' \perp A_2Z_1$, $A_2M_2' = A_2M_3' = r$. Углы $X_1A_2M_2'$ и $Z_1A_2M_3'$ изображают соответственно углы φ и γ без искажения, а отрезки A_2M_{21} и A_2M_{31} дают координаты $(-x_1'')$ и $(-z_1'')$ точки M в системе $X_1A_2Z_1$. В плоскости Π_1 по C_1H_1 проводим ось C_1Y_2 и перпендикулярно к ней — ось C_1Z_2 . Совмещаем плоскость Π_2 с плоскостью Π_1 поворотом ее вокруг оси X_{15} . При этом ось X_2 совпадает с осью Z_2 . По M_2 и M_4 находим проекцию M_3 . С точкой M_3 совпадает проекция A_3 , так как $AM \perp \Pi_2$. Отрезки M_1M_3 и C_1M_1 изображают соответственно координаты x_2'' и y_2'' точки M в системе $X_2C_1Y_2$. Опуская перпендикуляр из точки E_1 на ось X_{12} , получим E_2 , так как точка E лежит в плоскости Π_1 . Имея E_1 и E_2 , находим проекции E_1 и E_2 . Проекция C_2 совпадает с C_4 , так как точка C лежит в плоскостях Π_3 и Π_4 . Таким образом, получаем угол $E_2A_3C_4$, равный искомому углу θ .

3. Учитывая, что $A_1A_2 = A_2A_{12}$, $A_1A_{12} = A_4A_{21}$, $A_2A_{21} = A_3M_1$, из треугольников $E_1A_1A_2$, $C_2A_2A_1$ и контуров $OE_1A_1A_2A_{12}O$, $A_1A_{12}A_2A_{21}A_3A_4$, получим

$$(s_{12} \sin \alpha_2 + a_1 \cos \alpha_2 \sin \varphi_{12}) \cos \alpha_2 \sin \varphi_{23} + (a_1 \cos \varphi_{12} - a_2) \cos \alpha_2 \cos \varphi_{23} = r + a_2 \cos \alpha_2 - (s_{23} + s_{12} \cos \alpha_2 - a_1 \sin \alpha_2 \sin \varphi_{12}) \sin \alpha_2; \quad (1)$$

$$x_2'' = (s_{12} \sin \alpha_2 + a_1 \cos \alpha_2 \sin \varphi_{12}) \cos \varphi_{23} - (a_1 \cos \varphi_{12} - a_2) \sin \varphi_{23}; \quad (2a)$$

$$y_2'' \cos \alpha_2 = a_1 \operatorname{ctg} \alpha_2 + r \sin \alpha_2 - s_{23} - s_{12} \cos \alpha_2 + a_1 \sin \alpha_2 \sin \varphi_{12}. \quad (2b)$$

Вводя обозначения

$$m = (s_{12} \sin \alpha_2 + a_1 \cos \alpha_2 \sin \varphi_{12}) \cos \alpha_2,$$

$$n = (a_1 \cos \varphi_{12} - a_2) \cos \alpha_2,$$

$$e = r + a_2 \cos \alpha_2 - (s_{23} + s_{12} \cos \alpha_2 - a_1 \sin \alpha_2 \sin \varphi_{12}) \sin \alpha_2,$$

выражение (1) примет вид

$$m \sin \varphi_{23} + n \cos \varphi_{23} = e.$$

Откуда находим

$$\sin \varphi_{22} = \frac{me \pm n \sqrt{\sigma}}{m^2 + n^2}; \quad (3a)$$

$$\cos \varphi_{22} = \frac{ne \mp m \sqrt{\sigma}}{m^2 + n^2}. \quad (3b)$$

где $\sigma = m^2 + n^2 - e^2$.

Два знака перед радикалом в выражении (3) соответствуют двум возможным схемам механизма. Причем для схемы, показанной на рис. 1, соответствуют верхние знаки. Возводя в квадрат уравнения (1) и (2a) и складывая их, получим

$$x_2^{II} \cos \alpha_2 = \pm \sqrt{\sigma}. \quad (2a)^*$$

Имея в виду, что $M_1 M_{24} = M_1 M_{12}$, $M_2 M_{32} = M_2 M_{12}$, $y_3^{II} = s_{22} = M_2 M_{12}$, $\Delta_1 M_{12} = \Delta_1 A_{12} = A_{12} M_{12}$, $A_2 M_2 = A_{21} M_{21}$, из $\Delta E_1 A_1 A_1 O$, контура $O E_1 A_1 A_{12} \Delta_1 O$, трапеций $A_2 A_{12} M_{12} M_2$ и $A_1 A_{21} M_{21} M_1$, получим

$$x_2^{II} = s_{13} \sin \alpha_3 + a_1 \cos \alpha_3 \sin \varphi_{13} - r \cos \alpha_2 \sin \varphi_{23}; \quad (4a)$$

$$y_3^{II} = -s_{13} \cos \alpha_3 + a_1 \sin \alpha_3 \sin \varphi_{13} + r \sin \alpha_2; \quad (4b)$$

$$z_7^{II} = a_1 \cos \varphi_{13} - r \cos \alpha_2 \cos \varphi_{23}. \quad (4c)$$

Из контуров $O E_1 A_1 A_{12} \Delta_1 O$, $A_2 A_{12} M_{12} M_2 A_2$, $A_1 A_{21} M_{21} M_1 A_1$, $A_1 A_{12} M_{12} M_1 M_{13} A_1$, $A_1 A_3 M_{21} M_3 M_{13} A_1$ и треугольников $E_1 A_1 A_3$, $A_2 M_{21} M_3$, $A_1 M_{21} M_3$, $A_3 M_{21} M_3$ с учетом $A_1 M_{21} = M_1 M_{13}$, $M_3 M_{21} = A_3 M_{21}$ получим

$$\cos \varphi = \frac{x_2^{II}}{r} = -\cos \alpha_3 \cos \varphi_{13} \cos \varphi_{23} + (\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \sin \varphi_{23}) \sin \varphi_{13}; \quad (5a)$$

$$\cos \theta = \frac{y_3^{II}}{r} = \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_2 \sin \alpha_3 \sin \varphi_{23}; \quad (5b)$$

$$\cos \psi = \frac{z_7^{II}}{r} = -\cos \alpha_2 \sin \varphi_{13} \cos \varphi_{23} - (\sin \alpha_2 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \sin \varphi_{23}) \cos \varphi_{13}. \quad (5c)$$

Имея в виду, что $E_1 E_2 = E_1 E_{23}$, $E_2 E_{23} = E_2 E_{45}$, из контуров $O E_1 E_2 \Delta_1 O$, $\Delta_1 E_2 E_{23} \Delta_2 \Delta_1$, $\Delta_2 E_{23} E_4 E_{45} C_4 \Delta_2$, $C_4 E_{45} E_5 A_5 C_4$ и треугольников $C_4 M_4 A_5$, $C_4 \Delta_4 B_4$ находим

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{x_2^{II} y_3^{II} - x_2^E y_3^E}{x_2^{II} (x_2^E - x_2^{II}) + y_2^{II} (y_2^E - y_2^{II})} \quad (6)$$

где

$$x_2^E = E_2 E_{45} = a_3 \sin \varphi_{23} + s_{13} \sin \alpha_3 \cos \varphi_{23};$$

$$-y_2^E = C_4 E_{45} = (s_{23} + s_{13} \cos \alpha_3 - a_2 \operatorname{ctg} \alpha_2) \cos \alpha_2 - (s_{13} \sin \alpha_3 \sin \varphi_{23} - a_3 \cos \varphi_{23}) \sin \alpha_2.$$

Механизмы с одной степенью подвижности можно рассматривать как частные случаи механизмов с несколькими степенями подвижности. Так из рис. 1 можно получить следующие три вида механизмов с одной степенью подвижности: механизм для преобразования вращательного движения звена 1 вокруг оси $O E$ во вращение звена 2 вокруг оси $F \Delta$, если цилиндрические пары 1-3 и 2-3 заменить вра-

зательными парами ($s_{13} = \text{const}$, $s_{23} = \text{const}$): механизм для преобразования вращательного движения звена 1 вокруг оси OK в поступательное движение звена 2 вдоль оси FD , если цилиндрическую пару 2—3 заменить вращательной парой, а цилиндрическую пару 1—3 — поступательной ($s_{13} = \text{const}$, $\varphi_{23} = \text{const}$); механизм для преобразования поступательного движения звена 1 вдоль оси EO в поступательное движение звена 2 вдоль оси FD , если цилиндрические пары 1—3 и 2—3 заменить поступательными ($\varphi_{13} = \text{const}$, $\varphi_{23} = \text{const}$).

Перемещения звеньев этих механизмов определяются уравнениями (1)—(6), только следует учесть в них постоянность и переменность соответствующих параметров.

Этими же уравнениями определяются также перемещения звеньев трехзвенных механизмов, у которых неподвижным является плоскость Π (звено 2) вместо звена 3. На рис. 3 приведена кинематическая схема четырехзвенного механизма общего вида с одной шаровой 1—2, одной плоскостной 2—3 и двумя вращательными 1—4, 3—4 парами. Звено 2 обладает местной подвижностью — свободное вращение его вокруг оси AM . Этот механизм кинематически эквивалентен трехзвенному механизму общего вида с двумя вращательными и одной высшей парой (элементы высшей пары — шар и плоскость). Если в уравнениях (1)—(4) и (6) положить $r = a_2 = 0$, $s_{13} = \text{const}$, $s_{23} = \text{const}$, то получим аналитические выражения перемещений трехзвенного механизма с соприкасающимися точкой и плоскостью. Графическое определение угла поворота ведомого звена этого механизма дано в [3]. Если в уравнениях (1)—(4) и (6) принять еще $\alpha_2 = 0$, то получим аналитические зависимости перемещений частного случая четырехзвенного механизма рис. 3. Для этого частного случая в [4] найдено аналитическое выражение угла поворота ведомого звена.

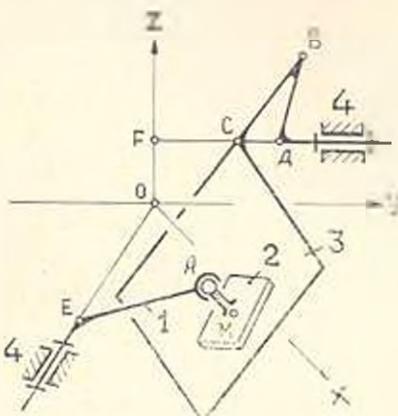


Рис. 3.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Получено 25.1.1968.

Հ. Հ. ՎԱՍԻՍՅԱՆԿ

ՀԳՎՈԳ ԳԻՏՈՎ ԵՎ ՀԱՐԹՈՒԹՅՈՒՆՆՈՎ ՈՒՏՎԱԾ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՏԽՄԻ ԻՈՐԴԱԿ
ՍԵՆՏԵՐԻ ՕՂԱՆԵՐԻ ՀԱՐԱԹԵՐԱԿԱՆ ՏԵՂԱԳՈՒՈՒՄՆԵՐԻ ՈՒՍԻՆ

Ա Վ Փ Ն Փ Ն Է Մ

Չհրատվել էրեք աստիճանի աստիճան ունեցող եռոտակ տարածական
մեխանիզմի որի տանող և տարվող օղակները հզվում են միմյանց՝ կազմելով

դունդ—հարթութիւնն զույգը, իսկ անշարժ օղակի հետ կազմում են դրանային կինեմատիկ զույգեր: Սղակների հարաբերական տեղափոխումները որոշվում են դրաֆտանալիտիկ եղանակով: Տվյալ մեխանիզմի համար արտածված անալիտիկ արտահայտութիւնները տարածվում են մեկ աղատութեան աստիճան ունեցող մի շարք մեխանիզմների վրա:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Пантелеев С. И.* Обзор и исследование структуры пространственных механизмов соприкасающихся рычагов. Труды МАИ им. С. Орджоникидзе, вып. 72, 1957.
2. *Ананов Г. Д.* Кинематика пространственных шарнирных механизмов сельскохозяйственных машин. Машгиз, 1963.
3. *Пантелеев С. И.* Кинематическое исследование пространственных трехзвенных механизмов графическим методом. Изв. вузов „Машиностроение“, 11—12, М., 1958.
4. *Heinrich H. J.* Kinematische Untersuchung von zwei raumlichen Getrieben (Kupplungen) „Maschinenbautechnik“, 15, 1966, H. 11.