Известия НАН Армении, Математика, том 57, н. 1, 2022, стр. 19 – 34

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ n-КРУЧЕНЫХ ГРУПП

В. С. АТАБЕКЯН, Г. Г. ГЕВОРГЯН

https://doi.org/10.54503/0002-3043-2022.57.1-19-34

Ереванский государственный университет [1]
E-mails: *avarujan@ysu.am; grigor.gevorgyan@ysumail.am*

Посвящается 90-летию Сергея Ивановича Адяна

Аннотация. В работе для n-крученых групп нечетного периода $n \geq 1003$ строится некоторая модификация метода, который был придуман С. И. Адяном для положительного решения известной проблемы о существовании некоммутативных аналогов аддитивной группы рациональных чисел с любым конечным числом порождающих, и с ее помощью доказывается, что любая m-порожденная абелева группа D может быть вложена в качестве центра в некоторую группу A так, что фактор группа A/D изоморфна заданной n-крученой группе с не менее чем m независимыми определяющими соотношениями. В качестве приложения доказывается, что каждая конечная подгруппа любой n-крученой группы является циклической, что обобщает аналогичный результат, доказанный ранее С. И .Адяном для свободных бернсайдовых групп нечетного периода $n \geq 665$. Заметим, что множество неизоморфных s-порожденных n-крученых групп континуально для фиксированного $s > 1$ и любого нечетного $n \geq 1003$.

MSC2010 number: 20E22; 20F50.

Ключевые слова: центральное расширение, n-крученая группа; бернсайдова группа; периодическая группа; конечная подгруппа.

1. Введение

Если в группе G выполнено тождество $x^n = 1$, то говорят, что G является периодической группой экспоненты n, или, что G – n-периодическая группа. Все подобные группы составляют многообразие. Свободная группа ранга m этого многообразия обозначается через $B(m, n)$. Одна из самых известных проблем алгебры и теории групп (поставленный У.Бернсайдом в 1902 г.) имеет простую формулировку: *конечна ли всякая конечно порожденная группа* $B(m, n)$? В настоящее время свободные группы $B(m, n)$ называют также свободными бернсайдовыми группами в честь У. Бернсайда.

[1]Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке КН РА и РФФИ (РФ) в рамках совместой научной программы 20RF-152 и 20-51-05010 соответственно.

Отрицательное решение проблемы Бернсайда было получено в классической серии работ С. И. Адяна и П. С. Новикова. Несколько лет позже С. И. Адян в монографии [2] модифицировал и усилил построенную теорию и доказал свою знаменитую теорему: *для всех нечетных* $n \geq 665$ *и конечных* $m > 1$ *группы* $B(m,n)$ *бесконечны*. Помимо исследования групп $B(m,n)$, в монографии [2] построены и изучены ряд других групп имеющих новые непривычные свойства. Конструкции и идеи построения этих групп стали основой для решения целой серии хорошо известных старых и трудных проблем теории групп. Первая важная серия групп, построенных в [2] с помощью порождающих и определяющих соотношений, обозначена через $B(m,n,\alpha)$, где m – число порождающих группы, $n \geq 665$ – произвольное нечетное число, а α – натуральный параметр. В [2] доказано, что свободная бернсайдова группа $B(m,n)$ является прямым пределом по α групп $B(m,n,\alpha)$.

Следующий важный класс связан с известной проблемой конечного базиса теории групп, которая была поставлена Б. Нейманом в 1937 г. В [2] (см. также [3]) доказано, что при любом нечетном $n \geq 1003$ следующее семейство тождеств от двух переменных

$$\{(x^{pn}y^{pn}x^{-pn}y^{-pn})^n = 1\},$$

где параметр p пробегает все простые числа, является неприводимым, т.е. ни одно из этих тождеств не является следствием остальных. Отсюда следует, что для любого нечетного $n \geq 1003$ существует континуум различных многообразий $\mathcal{A}_n(\Pi)$ соответствующих различным множествам простых чисел Π. При этом, для каждого фиксированного значения $m > 1$ существует *континуум* неизоморфных групп $\Gamma(m,n,\Pi)$, где $\Gamma(m,n,\Pi)$ – относительно свободная группа ранга m многообразия $\mathcal{A}_n(\Pi)$.

Далее, в работе [4] (см. также [5]) было показано, что если группа G не содержит инволюций и задана конечным числом определяющих соотношений вида A^{n_i}, $i = 1,2,...,k$, где все показатели n_i делятся на фиксированное нечетное число $n \geq 665$, то в ней разрешимы проблема распознавания равенства слов и проблема сопряженности.

Любая из приведенных выше групп обладает следующими двумя свойствами: 1. группа имеет систему определяющих соотношений вида $A^n = 1$ для некоторых элементов A; 2. каждый элемент a группы, имеющий конечный порядок, удовлетворяет соотношению $a^n = 1$.

Мы приходим к следующему естественному определению. Пусть G – группа, заданная системой порождающих X и $\mathcal{P}$ – множество всех ее элементов конечного порядка записанных в порождающих X, а $n > 1$ – фиксированное натуральное число.

Определение 1.1. Скажем, что группа G имеет n-кручение, или G – n-крученая группа, если она может быть задана следующим образом:

$$G = \langle X \mid R^n = 1,\ R \in \mathcal{P}\rangle, \tag{1.1}$$

Циклическая группа порядка n и любая абсолютно свободная группа являются n-кручеными группами для произвольного натурального n. А. Каррас, В. Магнус и Д. Солитэр в [6] доказали, что в группе $G = \langle X | A^n = 1\rangle$, где A – простое слово (т.е. слово не являющееся собственной степенью другого слова), элемент A имеет порядок n в G, а каждый элемент конечного порядка в G сопряжен с некоторой степенью элемента A. Помимо [2] – [7], в еще одной работе [8] С. И. Адян исследовал свободные группы многообразия, удовлетворяющего тождеству $[x, y]^n = 1$, доказав, что коммутанты этих групп не являются периодическими группами при нечетных $n > 1001$ (решение проблемы И. Макдональда). На основании работы [8] нетрудно вывести, что эти свободные группы тоже являются n-кручеными группами. В работе [9] 2019 г. доказано, что n-периодическое произведение любого семейства n-крученых групп является n-крученой группой для любого нечетного $n \geq 665$. Напомним, что n-периодические произведения групп были введены С. И. Адяном в 1976 году в [10]. Легко убедится, что свободные группы любого многообразия вида $\mathcal{B}_n\mathcal{U}$, где $\mathcal{B}_n$ – бернсайдово многообразие, а $\mathcal{U}$ – многообразие, свободные группы которой не имеют кручение, тоже являются n-крученными группами. Некоторые группы, которые, по сути, являются n-кручеными, были построены и изучены также в работах А. Ю. Ольшанского, С. В. Иванова, И. Г. Лысенка и других авторов (см., например, [11] – [20]).

Из определения n-крученой группы G непосредственно следует, что тождественное на порождающих X отображение из G в $B(X, n)$ продолжается до сюръективного гомоморфизма, где $B(X, n)$ свободная бернсайдова группа периода n с одинаковой с G системой порождающих X. В частности, любая нециклическая n-крученая группа бесконечна, если n имеет нечетный делитель $k \geq 665$ или делитель вида $k = 16m \geq 8000$ в силу вышеуказанной теоремы С. И. Адяна и теоремы И. Г. Лысенка [13] (см. также [12]).

В работе [9] показано, что при нечетных $n \geq 665$ для каждой n-крученой группы можно построить теорию, аналогичную теории построенной в монографии [2], что позволяет n-крученые группы исследовать методами развитыми в [2] и изучить их ключевые свойства. В частности, в [9] доказано, что любая n-крученая группа может быть задана с помощью некоторой независимой системы определяющих соотношений вида $A^n = 1$ для некоторых слов A (см. (2.6) ниже). Такое представление n-крученой группы мы будем называть **представлением Адяна**.

В совместной работе [21] была построена некоторая модификация метода, который был использован С. И. Адяном (см. [2], [22]) для положительного решения известной проблемы П. Г. Конторовича о существовании некоммутативных аналогов аддитивной группы рациональных чисел с любым конечным числом порождающих. Было показано, что любая счетная абелева группа D может быть вербально вложена в качестве центра в некоторую m-порожденную группу A так, что фактор группа A/D будет изоморфна свободной бернсайдовой группе $B(m,n)$. Мы покажем, что на самом деле аналогичную модификацию можно построить для n-крученых групп. В продолжении работы мы будем предполагать, что $n \geq 1003$ – произвольное фиксированное нечетное число.

Теорема 1.1. *Любая m-порожденная (m может быть и бесконечной) абелева группа D может быть вложена в качестве центра в некоторую группу A_D так, что фактор группа A_D/D будет изоморфна заданной n-крученой группе с представлением Адяна* (2.6)*, в которой не менее чем m определяющих соотношений.*

С помощью теоремы 1.1 мы докажем

Теорема 1.2. *Любая конечная подгруппа каждой n-крученой группы – циклическая.*

Первыми примерами неабелевых периодических групп, все конечные подгруппы которых циклические, были свободные бернсайдовы группы $B(m,n)$ (см. теорему VII.1.8 из [2]). По словам С. И. Адяна, именно эти примеры явились поводом для постановки известного вопроса А. Тарского о существовании так называемого “монстра Тарского”: существует ли бесконечная группа периода n, все собственные подгруппы которой циклические?

В дальнейшем мы неоднократно будем ссылаться на монографию [2]. При ссылках на утверждения из [2] мы используем принятые в ней стандартные обозначения и систему ссылок. Например, II.5.3 [2] означает пункт 3 параграфа 5 главы II монографии [2].

В следующем параграфе мы построим так называемое представление Адяна для заданной n-крученой группы. В параграфе 3 будут построены специальные центральные расщирения n-крученых групп. На основе этих построений в параграфах 4 и 5 докажем теоремы 1.1 и 1.2 соответственно.

2. Представления Адяна для n-крученых групп

Пусть задана произвольная n-крученая группа G с представлением (1.1). Для каждой такой группы индукцией по натуральному параметру α в [9] построено некоторое представление с помощью порождающих X и новой системы определяющих соотношений $\{A^n = 1; A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha\}$. Коротко изложим построенную в [9] систему понятий, используя заданное множество слов $\mathcal{P}$ из представления (1.1).

Прежде всего, можно считать, что все слова $R \in \mathcal{P}$ в представлении (1.1) являются циклически несократимыми и простыми, т.е. ни одно слово R не является собственной степенью какого-либо слова. Действительно, если $R_1^k = R \in \mathcal{P}$, то элемент R_1 в G имеет конченый порядок, и так как G является n-крученой группой, то $R_1^n = 1$ в G. Тогда вместо соотношений $R^n = 1$ и $R_1^n = 1$ достаточно взять одно соотношение $R_1^n = 1$.

Для ранга 0 все понятия из I.4.1 [2] остаются без изменений. В частности, все несократимые слова называются приведенными в ранге 0, а всякое циклически несократимое слово есть период ранга 1.

Все слова $R \in \mathcal{P}$ являются *минимальными* периодами ранга 1 в силу их циклически несократимости и простоты (см. определение I.4.9 [2]). Среди всех приведенных в ранге 0 слов (множество которых обозначается через $\mathcal{R}_0$) выделим все *элементарные периоды* ранга 1 согласно определению I.4.10 из [2]. Элементарный период E ранга 1 назовем *отмеченным* (в ранге 0), если какой либо циклический сдвиг слова E или его обратного принадлежит множеству $\mathcal{P}$. В противном случае элементарный период ранга 1 назовем *неотмеченным.* Затем мы введем повороты ранга 1 для всех периодических слов, периоды которых отмеченные в ранге 0 элементарные периоды ранга 1. Эти повороты будут иметь обычную форму:

$$PA^tA_1Q \to P(A^{-1})^{n-t-1}A_2^{-1}Q, \tag{2.1}$$

где A или A^{-1} есть отмеченный элементарный период ранга 1 или некоторый его циклический сдвиг, $A \equiv A_1A_2$ и слова A^tA_1 и $(A^{-1})^{n-t-1}A_2^{-1}$ содержат не менее $p = 9$ участков, т.е. являются p-степенями.

Естественным образом мы определяем *реальные повороты* ранга 1. На базе реальных поворотов определяется понятие *ядра* ранга 1 для слов $W \in \mathcal{N}_1$, где множество слов $\mathcal{N}_1$ определяется согласно I.4.21 из [2]. Далее согласно I.4.26 из [2] мы определяем множества $\mathcal{R}_1, \mathcal{K}_1, \mathcal{L}_1, \mathcal{M}_1$, отношение эквивалентности ранга 1, обозначаемое через $\overset{1}{\sim}$, а также все остальные понятия ранга 1. Доказательства всех необходимых свойств введенных в §4 главы I монографии [2] понятий ранга 1 проходят без изменений. Новым является только ограничение класса элементарных слов отмеченными элементарными словами ранга 1. Наконец, для любых слов $B, C \in \mathcal{R}_1$ определим бинарную *операцию* $[B, C]_1$ *смыкания* ранга 1 по аналогии определения I.4.36 [2]:

$$[B, C]_1 = PQ \leftrightarrow \exists T(B \overset{1}{\sim} PT \ \&\ C \overset{1}{\sim} T^{-1}Q \ \&\ PQ \in \mathcal{R}_1).$$

Далее совместной индукцией по рангу α все введенные понятия определяются для всех натуральных рангов. Пусть *отмеченные* периоды ранга α и аналоги всех понятий, которые были определены в §4 главы I моногарфии [2], уже введены для всех рангов $\leq \alpha$. Определим их в ранге $\alpha + 1$.

Если $W \in \mathcal{R}_0$ и $W \equiv x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$, где $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ принадлежат множеству порождающих X (знак $\equiv$ означает графическое равенство), то через $[W]_\alpha$ обозначим результат следующей последовательности смыканий ранга α:

$$[[\cdots[[x_{i_1}, x_{i_2}]_\alpha], \cdots]_\alpha, x_{i_k}]_\alpha.$$

Таким образом,

$$[W]_\alpha \equiv [[\cdots[[x_{i_1}, x_{i_2}]_\alpha, \cdots]_\alpha, x_{i_k}]_\alpha \in \mathcal{R}_\alpha. \tag{2.2}$$

Элементарный период A ранга $\alpha + 1$ назовем *отмеченным элементарным периодом* (в ранге α), если можно указать такое слово B и такое слово $R \in \mathcal{P}$, что

$$[R]_\alpha \overset{\alpha}{\sim} [BA^jB^{-1}]_\alpha \tag{2.3}$$

для некоторого целого j. В противном случае элементарный период ранга $\alpha + 1$ назовем *неотмеченным элементарным периодом ранга* $\alpha + 1$. Легко проверить, что при $\alpha = 1$ определение отмеченного элементарного периода ранга α совпадает с приведенным выше определением отмеченного элементарного периода ранга 1, так как если $BE^jB^{-1} \overset{0}{\sim} R \in \mathcal{P}$, то $BE^jB^{-1} = R$ в свободной группе. Тогда $|j| = 1$, поскольку слово R является простым. Следовательно один из слов E, E^{-1} является циклическим сдвигом слова R в силу циклической несократимости элементов из $\mathcal{P}$ и элементарного периода E.

Используя понятие отмеченного элементарного периода мы по аналогии с §2 главы VII монографии [2] вносим некоторые изменения в определениях некоторых понятий из §4 главы I монографии [2]. Именно, во всех упоминаниях о нормированных вхождениях элементарных слов ранга α будем предполагать, что имеются ввиду отмеченные элементарные периоды ранга α. Все остальные определения формально остаются без изменения. Все утверждения глав II-V монографии [2], а также все утверждения из пунктов 2.3, 2.4 и 2.7-2.10 главы VII [2] и лемма 2.6 из работы [23] их доказательства формально повторяются и остаются в силе с учетом поправки о понятии отмеченного элементарного периода в приведенном выше новом смысле. Подчеркнем, в частности, что согласно леммы V.1.8 [2] бинарная операция смыкания ранга α является ассоциативной операцией при любом $\alpha \geq 0$.

На основании введенных понятий мы построим новое представление для группы G. Пусть $\Gamma_G(X, 0)$ есть свободная группа с образующими X. Сначала построим вспомогательные группы $\Gamma_G(X, \alpha)$, которые строятся индукцией по рангу α (по аналогии определения VI.2.2 групп $B(m, n, \alpha)$ из монографии [2]).

Предположим $\alpha > 0$ и группы $\Gamma_G(X, \gamma)$ уже построены для всех $\gamma \leq \alpha - 1$. Через $\mathcal{E}_\alpha$ обозначим множество, состоящее из таких отмеченных элементарных периодов A ранга α, чтобы выполнялись условия:

(a) для всякого отмеченного элементарного периода E ранга α имеется одно и только одно слово $A \in \mathcal{E}_\alpha$ такое, что период E сопряжен в группе $\Gamma_G(X, \alpha - 1)$ или с периодом A, или с A^{-1}.

(b) если $A \in \mathcal{E}_\alpha$, то для некоторых слов P и Q имеет место включение $PA^nQ \in \overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$.

Замечание. *Существование элементарных периодов A с указанным выше свойствами* (a) *и* (b) *следует из леммы* 2.6 (см. ниже).

Через $\Gamma_G(X,\alpha)$ обозначим группу с теми же образующими X и системой определяющих соотношений $A^n = 1$, где $A \in \bigcup_{\alpha=1}^n \mathcal{E}_\alpha$:

$$\Gamma_G(X,\alpha) = \langle X \mid A^n = 1,\ A \in \bigcup_{\alpha=1}^{n} \mathcal{E}_\alpha \rangle.$$

Далее, обозначим

$$\mathcal{E} = \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha. \tag{2.4}$$

Предельную группу обозначим через $\Gamma_G(X)$. Она порождается образующими X и имеет систему определяющих соотношений $A^n = 1$, где $A \in \mathcal{E}$:

$$\Gamma_G(X) = \langle X \mid A^n = 1,\ A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha \rangle. \tag{2.5}$$

В [9] доказано

Лемма 2.1. *Группы G и $\Gamma_G(X)$ совпадают:*

$$G = \langle X \mid R^n = 1,\ R \in \mathcal{P} \rangle = \langle X \mid A^n = 1,\ A \in \bigcup_{\alpha=1}^{\infty} \mathcal{E}_\alpha \rangle = \Gamma_G(X). \tag{2.6}$$

Как отметили выше, представление (2.6) мы называем представлением Адяна группы G.

В [9] обоснованы также следующие важные леммы.

Лемма 2.2. *Для любых двух слов $C, D \in \mathcal{R}_\alpha$ $(\alpha \geq 0)$ выполнено соотношение*

$$C \overset{\alpha}{\sim} D \ \Leftrightarrow C = D \text{ в } \Gamma_G(X,\alpha).$$

Лемма 2.3. *Для любого ранга α и любого слова C в $\Gamma_G(X,\alpha)$ имеет место равенство*

$$C = [C]_\alpha.$$

Лемма 2.4. *Для любого ранга α и любого слова C можно указать такое слово $D \in \mathcal{K}_\alpha$, что $C = D$ в $\Gamma_G(X,\alpha)$. Если $\alpha \geq \partial(C)$, то такое D можно указать в $\mathcal{A}_{\alpha+1}$.*

Лемма 2.5. *Элементарный период A является отмеченным элементарным периодом ранга α тогда и только тогда, когда можно указать такое слово $R \in \mathcal{P}$ и такое слово B, что*

$$R = BA^jB^{-1}$$

в группе $\Gamma_G(X,\alpha-1)$ для некоторого целого j.

Лемма 2.6. *Каждый элементарный период E ранга $\alpha \geq 1$ сопряжен в группе $\Gamma_G(X, \alpha - 1)$ некоторому элементарному периоду A ранга α такому, что для некоторых слов P и Q имеет место включение $PA^nQ \in \overline{\mathcal{M}}_{\alpha-1}$. При этом, если E – отмеченный (неотмеченный) элементарный период ранга α, то и A является отмеченным (неотмеченным) элементарным периодом ранга α.*

Лемма 2.7. *Если E есть отмеченный элементарный период некоторого ранга $\gamma \geq 1$ (или если $E \in \mathcal{E}_\gamma$), то E имеет порядок n в группе $\Gamma_G(X, \gamma)$ (и в группе $\Gamma_G(X)$).*

Лемма 2.8. *Если E есть неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ, то E имеет бесконечный порядок в $\Gamma_G(X)$.*

Лемма 2.9. *Для любого слова C, которое не равно 1 в группе $\Gamma_G(X)$, можно указать такие слова T и E, что $C = TE^rT^{-1}$ в $\Gamma_G(X)$ при некотором целом r, где либо $E \in \mathcal{E}$, либо E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$.*

3. Центральные расширения

Первые примеры *неабелевых* групп без кручения, в которых любые две неединичные подгруппы имеют нетривиальное пересечение (вопрос 1.63 из Коуровской тетради), были построены С. И. Адяном в работе [22] (см. также [2], гл. VII). Построенные С. И. Адяном неабелевы аналоги группы рациональных чисел, обозначаемые в монографии [2] через $A(m, n)$, представляют собой центральные расширения свободной бернсайдовой группы $B(m, n)$ с бесконечным центром, порождаемым новым образующим элементом d бесконечного порядка. Задание группы $A(m, n)$ порождающими и определяющими соотношениями получается из задания группы $B(m, n)$ с помощью построенной в [2, VI.2.1] *независимой* системы определяющих соотношений $\{A^n = 1 | A \in \mathcal{E}\}$ в результате добавления к ее алфавиту новой буквы d, которая коммутирует со всеми порождающими, и заменой каждого соотношения $A^n = 1$ на $A^n = d$. Если к определяющим соотношениям группы $A(m, n)$ добавить еще одно соотношение $d^k = 1$, то в полученной группе $A'(m, n)$ центр, порождаемый элементом d, будет иметь порядок k. Группа $A'(m, n)$ обладает интересным свойством: группа $A'(m, n)$ допускает только дискретную топологию. Вопрос о существовании нетопологизируемой счетной группы был поставлен А. А. Марковым и оставался открытым несколько десятилетий. Позже в работе [21] была предложена некоторая модификация определения группы $A(m,n)$, что позволило с помощью некоторой модификации в изложенном в монографии [2] методе исследования этих групп для произвольной счетной абелевой группы $\mathcal{D}$ построить группу, центр которой совпадает с $\mathcal{D}$, а фактор группа по подгруппе $\mathcal{D}$ изоморфна свободной бернсайдовой группе $B(m,n)$. Определение n-крученых групп позволяет эту модификацию продвинуть дальше и для произвольной m-порожденной абелевой группы $\mathcal{D}$ построить группу, центр которой совпадает с $\mathcal{D}$, а фактор группа по подгруппе $\mathcal{D}$ изоморфна заданной n-крученой группе, в представлении Адяна которой не менее m определяющих соотношений. Ниже мы построим указанные центральные расширения.

Для определенности фиксируем конечный алфавит $X = \{a_1, ..., a_m, a_1^{-1}, ..., a_m^{-1}\}$, $m > 1$, и рассмотрим в этом алфавите множество элементарных слов (2.4) для заданной n-крученой группы G (1.1). Множество $\mathcal{E}$ не более чем счетно. Фиксируем некоторую нумерацию и пусть $\mathcal{E} = \{A_j | j \in \mathbb{J}\}$ (где $\mathbb{J}$ – или множество натуральных чисел, или его начальный отрезок).

Фиксируем также произвольную не более чем счетную абелеву группу $\mathcal{D}$, заданную порождающими и определяющими соотношениями:

$$\mathcal{D} = \langle d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots \mid r = 1,\ r \in \mathcal{R}\rangle, \tag{3.1}$$

где $\mathcal{R}$ – некоторое множество слов в групповом алфавите $d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots$ По условию теоремы 1.1 имеет место неравенство $|\mathbb{J}| \geq |\{d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots\}|$.

Через $A_{\mathcal{D}}(G)$ обозначим группу, заданную системой образующих двух видов

$$a_1, a_2, ..., a_m \tag{3.2}$$

и

$$d_1, d_2, ..., d_i, ... \tag{3.3}$$

и системой определяющих соотношений трех сортов:

$$r = 1, \ \text{для всех } \ r \in \mathcal{R}, \tag{3.4}$$

$$a_i d_j = d_j a_i, \tag{3.5}$$

$$A_j^n = d_j \tag{3.6}$$

для всех $i = 1, 2, ..., m$, $j \in \mathbb{J}$ и $A_j \in \mathcal{E}$. При этом, если $|\mathbb{J}| > |\{d_1, d_2, \ldots, d_i, \ldots\}| = k$, то для всех $j > k$ определяем

$$A_j^n = d_k. \tag{3.7}$$

Из соотношений (3.6) вытекает, что группы $A_{\mathcal{D}}(G)$ являются m-порожденными группами с порождающими (3.2). Для групп $A_{\mathcal{D}}(G)$ справедлива следующая основная теорема.

Теорема 3.1. *При любом $m > 1$ и нечетном $n \geq 1003$ и для любой абелевой группы $\mathcal{D}$ с представлением (3.1) имеют место следующие утверждения:*

1. центр группы $A_{\mathcal{D}}(G)$ совпадает с $\mathcal{D}$,

2. фактор группа группы $A_{\mathcal{D}}(G)$ по подгруппе $\mathcal{D}$ есть заданная n-крученая группа G.

Замечание. Обращаем внимание читателя на определенную свободу при построении групп $A_{\mathcal{D}}(G)$. Во первых, порядок нумерации элементарных периодов $A_j \in \mathcal{E}$, $j \in \mathbb{N}$ – свободный. Во вторых, мы имеем свободу и при выборе задания (3.1) абелевой группы $\mathcal{D}$. Таким образом, в силу определяющих соотношений вида (3.6), для фиксированной группы $\mathcal{D}$ мы можем получить разные группы $A_{\mathcal{D}}(G)$. При этом для каждой из них справедлива теорема 3.1.

4. Доказательство теоремы 1.1

Для обоснования теоремы 1.1, очевидно, достаточно доказать теорему 3.1.

Для слов в алфавите (3.2)–(3.3) группы $A_{\mathcal{D}}(G)$ мы построим обобщенные аналоги понятий, которые были построены и изучены в главах I-V монографии [2].

Множество всех слов вида Qd, где Q – слово в алфавите (3.2), принадлежащее множеству $\mathcal{R}_\alpha$, а $d \in \mathcal{D}$, где группа D имеет задание (3.1), обозначим через $\mathcal{R}_\alpha^D$. Аналогично, через $\mathcal{N}_\alpha^D$, $\mathcal{P}_\alpha^D$, $\mathcal{K}_\alpha^D$, $\mathcal{L}_\alpha^D$, $\mathcal{M}_\alpha^D$, $\overline{\mathcal{M}}_\alpha^D$, $\mathcal{A}_\alpha^D$ обозначим множество слов вида Qd, где $d \in \mathcal{D}$, а Q принадлежит, соответственно, множеству $\mathcal{N}_\alpha$, $\mathcal{P}_\alpha$, $\mathcal{K}_\alpha$, $\mathcal{L}_\alpha$, $\mathcal{M}_\alpha$, $\overline{\mathcal{M}}_\alpha$, $\mathcal{A}_\alpha$.

Мы будем рассматривать только такие вхождения в слова Qd, основы которых входят в Q, т.е. являются словами в алфавите (3.2). При этом если V есть вхождение в слово Q, то через Vd будем обозначать вхождение, получающееся в результате приписывания слова d к вхождению V справа.

Понятия периодического, целого, полуцелого и элементарного слова ранга α, порождающего вхождения ранга α и опорного ядра ранга α и все понятия, которые были определены в [2, гл. I, пункты 4.3-4.10], определяются точно так, как они определились выше в параграфе 2 для заданной n-крученой группы G.

С учетом этих изменений далее мы буквально повторим параграф 3 работы [9]. В частности, совместной индукцией по рангу α определим на множестве $\mathcal{R}_\alpha^\mathcal{D}$ отношение $\overset{\alpha}{\approx}$ обобщенной эквивалентности ранга α и операцию обобщенного смыкания $[X,Y]_\alpha^\mathcal{D}$ ранга α. При этом, аналогично соотношениям (12) и (13) из [9], доказывается, что отношение $\overset{\alpha}{\approx}$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$P \overset{\alpha}{\approx} Q \Leftrightarrow \exists d \forall d' \, (Pd' \overset{\alpha}{\approx} Q(dd')), \tag{4.1}$$

$$Qd \overset{\alpha}{\approx} Qd' \Rightarrow d = d' \text{ в } \mathcal{D}, \tag{4.2}$$

где P, Q – слова в алфавите (3.2), $d, d' \in \mathcal{D}$, (dd') – произведение элементов d и d' в абелевой группе $\mathcal{D}$.

На этом основании построим вспомогательную группу $\Gamma^\mathcal{D}(G,\alpha)$, элементами которой являются классы эквивалентностей, на которые множество $\mathcal{R}_\alpha^\mathcal{D}$ разбивается отношением эквивалентности $\overset{\alpha}{\approx}$, а групповая операция совпадает с операцией смыкания ранга α. По аналогии с пунктами 1.4, 1.5 главы VII работы [2] проверяется, что $\Gamma^\mathcal{D}(G,\alpha)$ относительно указанной операции является группой. Опишем эту группу с помощью порождающих и определяющих соотношений. Для этого через $A_\mathcal{D}(G,\alpha)$ обозначим группу с порождающими $a_1, a_2 ..., a_m, d_1, d_2, ..., d_i, ...$ и системой определяющих соотношений видов (3.4), (3.5) и вида (3.6) для всех тех $j \in \mathbb{N}$, для которых $A_j \in \bigcup\limits_{t=1}^{\alpha} \mathcal{E}_t$.

Лемма 4.1. *Для любых слов $X, Y \in \mathcal{R}_\alpha^\mathcal{D}$ выполнены эквивалентности*

$$X = Y \quad \textit{в} \quad A_\mathcal{D}(G,\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad X \overset{\alpha}{\approx} Y \quad \Leftrightarrow \quad X = Y \quad \textit{в} \quad \Gamma^\mathcal{D}(G,\alpha).$$

Эта лемма доказывается аналогично лемме 3 работы [9]. Нужно лишь в ее доказательстве группу $A_\mathcal{D}(m,n,\alpha)$ заменить на $A_\mathcal{D}(G,\alpha)$, а группу $\Gamma^\mathcal{D}(m,n,\alpha)$ заменить на $\Gamma^\mathcal{D}(G,\alpha)$.

Обозначим через $\mathcal{Z}$ подгруппу группы $A_\mathcal{D}(G)$, порожденную элементами $\{d_j | j \in \mathbb{N}\}$.

Лемма 4.2. *Подгруппа $\mathcal{Z}$ совпадает с центром группы $A_\mathcal{D}(G)$ и фактор группа $A_\mathcal{D}(G)/\mathcal{Z}$ изоморфна заданной n-крученой группе G.*

Доказательство. В силу соотношений (3.5) $\mathcal{Z}$ содержится в центре группы $A_{\mathcal{D}}(G)$. Согласно предложению 2.1 и соотношениям (3.6), (3.7) фактор группа группы $A_{\mathcal{D}}(G)$ по подгруппе $\mathcal{Z}$ есть заданная n-крученая группа G. Более того, в силу следствия 1 работы [9], согласно которой центр любой нециклической n-крученой группы тривиален, группа $G = A_{\mathcal{D}}(G)/\mathcal{Z}$ имеет тривиальный центр, поэтому $\mathcal{Z}$ совпадает с центром группы $A_{\mathcal{D}}(G)$. □

Согласно лемме 4.2 подгруппа $\mathcal{Z}$, порожденная элементами $\{d_j | j \in \mathbb{N}\}$ совпадает с центром группы $A_{\mathcal{D}}(G)$, фактор группа $A_{\mathcal{D}}(G)/\mathcal{Z}$ изоморфна группе G. Поэтому теорема 3.1 будет доказана, если мы покажем, что абелева группа $\mathcal{D}$ с этими же порождающими $\{d_j | j \in \mathbb{N}\}$ вложена в группу $A_{\mathcal{D}}(G)$ и, тем самым, совпадает с $\mathcal{Z}$.

Сначала убедимся, что группа $\mathcal{D}$ вложена в группу $\Gamma^{\mathcal{D}}(G, \alpha)$ для любого ранга α. Предположим, что для некоторых элементов $d', d'' \in \mathcal{D}$ имеет место эквивалентность $d' \overset{\alpha}{\approx} d''$. Тогда $d' \overset{\gamma}{\approx} d''$ для любого ранга $\gamma \geq \alpha$, так как, по определению, $d', d'' \in \mathcal{R}_{\gamma}^{\mathcal{D}}$. Отсюда, в силу соотношения (4.2), немедленно получаем, что $d' = d''$ в абелевой группе $\mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{D}$ вложена в группу $\Gamma^{\mathcal{D}}(G, \gamma)$. Отсюда, в силу леммы 4.1, вытекает, что абелева группа $\mathcal{D}$ вложена в группу $A_{\mathcal{D}}(G, \gamma)$ для любого ранга $\gamma \geq \alpha$. Поскольку множество определяющих соотношений (3.4)–(3.7) группы $A_{\mathcal{D}}(G)$ есть объединение множеств определяющих соотношений групп $A_{\mathcal{D}}(G, \gamma)$ для всех $\gamma \geq \alpha$, то $\mathcal{D}$ вложена и в группу $A_{\mathcal{D}}(G)$. Теорема 3.1 доказана.

5. Конечные подгруппы n-крученых групп

Докажем утверждение теоремы 1.2 о том, что любая конечная подгруппа каждой n-крученой группы – циклическая. Мы проведем рассуждения, близкие к рассуждениям доказательства теоремы 1.8 из [2] о том, что все конечные подгруппы свободной бенсайдовой группы нечетного периода $n \geq 665$ конечны.

Для заданной n-крученой группы $\Gamma(X)$ по указанной в (3.2)–(3.6) схеме построим группу $A_{\mathcal{D}}(X)$, в качестве группы $\mathcal{D}$ взяв бесконечную циклическую группу

$$\mathcal{D} = \langle d_1 \rangle.$$

В силу пункта 1 теоремы 3.1, центр этой группы $A_{\mathcal{D}}(X)$ – бесконечная циклическая группа, порожденная элементом $d = d_1$.

Мы утверждаем, что группа $A_{\mathfrak{D}}(X)$ не имеет кручения. Чтобы доказать это, сначала заметим, что в силу пункта 2 теоремы 3.1, всякий нетривиальный элемент a группы $A_{\mathfrak{D}}(X)$ можно представить в виде $a = xd^j$, где x есть слово в групповом алфавите X, а d порождающий элемент центра $A_{\mathfrak{D}}(X)$. Покажем, что a имеет бесконечный порядок.

Если слово x равно 1 в $\Gamma(X)$, то $x = d^i$ в $A_{\mathfrak{D}}(X)$ для некоторого целого i, поскольку $A_{\mathfrak{D}}(X)/D = \Gamma(X)$. Тогда $a = d^{j+i} \neq 1$, где d – элемент бесконечного порядка. Значит, a имеет бесконечный порядок.

Если $x \neq 1$ в $\Gamma(X)$, то в силу леммы 2.9 найдутся такие слова T и E, что $x = TE^sT^{-1}$ в группе $\Gamma(X)$ при некотором целом r, где или $E \in \mathcal{E}$, т.е., E является отмеченным элементарным периодом некоторого ранга γ, или E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ, причем слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$.

В случае, когда E – неотмеченный элементарный период некоторого ранга γ и слово E^q входит в некоторое слово из класса $\overline{\mathcal{M}}_{\gamma-1}$, то по лемме 2.8, элемент E, а значит и x, имеет бесконечный порядок в фактор группе $\Gamma(X)$. Тогда его прообраз a в $A_{\mathfrak{D}}(X)$ тоже имеет бесконечный порядок.

Теперь предположим, что $E \in \mathcal{E}$, т.е., что E отмеченный элементарный период некоторого ранга γ. Представим число s в виде $s = nq + r$, где $0 < r < n$ ($x \neq 1$ в $\Gamma(X)$). Используя соотношения (3.5), (3.6), получим

$$a = TE^{nq+r}T^{-1}d^j = TE^rT^{-1}d^{q+j}. \tag{5.1}$$

в $A_{\mathfrak{D}}(X)$. Поскольку d – центральный элемент, из (5.1) вытекает

$$a^n = d^{n(q+j)+r}.$$

Так как $0 < r < n$ и d порождающий элемент бесконечной циклической группы, то $a^n = d^{n(q+j)+r}$ нетривиальный элемент бесконечного порядка. Следовательно, элемент a тоже имеет бесконечный порядок. Таким образом, мы показали, что группа $A_{\mathfrak{D}}(X)$ является группой без кручения.

Покажем, что любая конечная подгруппа произвольной n-крученой группы $\Gamma(X)$ является циклической группой. Пусть конечная подгруппа K группы $\Gamma(X)$ порождается элементами $g_1, g_2, ..., g_k$. Рассмотрим порожденную элементами g_1, g_2, ..., g_k, d подгруппу K_1 группы $A_{\mathfrak{D}}(X)$, где $A_{\mathfrak{D}}(X)$ – построенное выше центральное расширение группы $\Gamma(X)$ с помощью бесконечной циклической группы $\langle d \rangle$. Элемент d содержится в центре группы K_1, поэтому фактор группа группы

K_1 по своему центру конечна. По известной теореме Бэра (см. [24]) из конечности фактор группы по центру следует конечность коммутанта. Следовательно, коммутант группы K_1 конечен. В силу доказанному выше, группа $A_{\mathfrak{D}}(X)$ является группой без кручения и в ней конечна только единичная подгруппа. Значит коммутант группы K_1 тривиален, т.е. K_1 является абелевой группой. Тогда образ K в $\Gamma(X)$ группы K_1 тоже является абелевой группой. Согласно следствию 2 работы [9] всякая абелева подгруппа группы $\Gamma(X)$ – циклическая группа. Значит, K – циклическая подгруппа. Теорема 1.2 доказана.

Abstract. For n-torsion groups of odd period $n \geq 1003$ we construct a certain modification of the method invented by S. I. Adyan to positively solve the well-known problem of the existence of non-commutative analogs of the additive group of rational numbers with a finite number of generators. Using this modification we prove that any m-generated abelian group D can be embedded as a center into some group A so that the quotient group A/D is isomorphic to a given n-torsion group with at least m independent defining relations. As an application, it is proved that every finite subgroup of any n-torsion group is cyclic, which generalizes a similar result proved earlier by S. I. Adyan for free Burnside groups of odd period $n \geq 665$. Note that the set of non-isomorphic s-generated n-torsion groups has a cardinality of the continuum for fixed $s > 1$ and any odd $n \geq 1003$.

Список литературы

[1] S. I. Adian, “The Burnside problem and related topics”, Russian Math. Surveys, **65**:5, 805 – 855 (2010).

[2] S. I. Adian, The Burnside Problem and Identities in Groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **95**, Springer-Verlag, Berlin (1979).

[3] S. I. Adian, “Infinite irreducible systems of group identities”, Math. USSR-Izv., **4**:4, 721 – 739 (1970).

[4] S. I. Adian, “On the word problem for groups defined by periodic relations”, Burnside groups, Proc. Workshop, Univ. Bielefeld (1977), Lecture Notes in Math., 806, Springer, Berlin, 41 – 46 (1980).

[5] S. I. Adian, “Groups with periodic defining relations”, Mat. Zametki, **83**:3, 323 -– 332; Math. Notes, **83**:3, 293 — 300 (2008).

[6] A. Karrass, W. Magnus, D. Solitar, “Elements of finite order in groups with a single defining relation”, Comm. Pure Appl. Math. **13**, 57 – 66 (1960).

[7] S. I. Adian, “New estimates of odd exponents of infinite Burnside groups”, Proc. Steklov Inst. Math., **289**, 33 – 71 (2015).

[8] S. I. Adyan, “Groups with periodic commutators”, Dokl. Math., **62**:2, 174 -– 176 (2000).

[9] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “n-torsion groups”, J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci., **54**:6, 319 – 327 (2019).

[10] S. I. Adian, “Periodic products of groups”, Number theory, mathematical analysis and their applications, Proc. Steklov Inst. Math., **142**, 1 – 19 (1979).

[11] A. Yu. Olshanskii, The Geometry of Defning Relations in Groups, Kluwer Academic Publishers (1991).
[12] S. V. Ivanov, “The free Burnside groups of sufficiently large exponents”, Int. J. of Algebra and Computation, **4**, 1 – 307 (1994).
[13] I. G. Lysenok, “Infinite Burnside groups of even exponent”, Izv. Math., **60**:3, 453 – 654 (1996).
[14] S. V. Ivanov, A. Yu. Olshanskii, “On finite and locally finite subgroups of free Burnside groups of large even exponents”, J. Algebra, **195**:1, 241 – 284 (1997).
[15] A. Yu. Ol’shanskii, “Self-normalization of free subgroups in the free Burnside groups”, Groups, rings, Lie and Hopf algebras (St. John’s, NF, 2001), Math. Appl., **555**, Kluwer, Dordrecht 179 – 187 (2003).
[16] V. L. Shirvanjan, “Embedding the group $B(\infty, n)$ in the group $B(2, n)$”, Math. USSR-Izv., **10**:1, 181 -– 199 (1976).
[17] V. S. Atabekian, “On subgroups of free Burnside groups of odd exponent n>1003”, Izv. Math., **73**:5, 861 – 892 (2009).
[18] V. S. Atabekyan, “Normal automorphisms of free Burnside groups”, Izv. Math., **75**:2, 223 – 237 (2011).
[19] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “On free groups in the infinitely based varieties of S. I. Adian”, Izv. Math., **81**:5, 889 – 900 (2017).
[20] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Normal automorphisms of free groups of infinitely based varieties”, Math. Notes, **108**:2, 149 -– 154 (2020).
[21] S. I. Adian, V. S. Atabekyan, “Central extensions of free periodic groups”, Sb. Math., **209**:12, 1677 – 1689 (2018).
[22] S. I. Adian, “On some torsion-free groups”, Math. USSR-Izv., **5**:3, 475 – 484 (1971).
[23] S. I. Adian, I. G. Lysenok, “On groups all of whose proper subgroups of which are finite cyclic”, Math. USSR-Izv., **39**:2, 905 – 957 (1992).
[24] R. Baer, “Endlichkeitskriterien fur Kommutatorgruppen”, Math. Aim. **124**, 161 – 177 (1952).

Поступила 27 марта 2021

После доработки 27 марта 2021

Принята к публикации 20 сентября 2021