

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Д. А. АВЕТИСЯН

ПОИСК МАКСИМУМА ВДОЛЬ ПОДХОДЯЩИХ ДОПУСТИМЫХ
 НАПРАВЛЕНИЙ

Составной частью автоматических систем оптимального управления являются вычислительные устройства, предназначенные для поддержания на максимальном (минимальном) уровне заданного показателя качества управляемой системы, принятого за критерий оптимальности. Многие устройства такого рода осуществляют процесс автоматического поиска максимума (минимума) функции нескольких переменных в ограниченной области поиска, обладающей той особенностью, что локальный максимум совпадает с глобальным. Конкретные примеры подобных автоматических систем вместе с обширной библиографией рассмотрены, например, в [1, 2]. Эффективность этих систем во многом определяется быстродействием процесса поиска и простотой технической реализации, что в свою очередь зависит от метода поиска. Для поиска локального максимума широкое практическое применение нашли градиентные методы. Однако, при попадании на границу области поиска дальнейшее движение вдоль градиента максимизируемой функции может оказаться недопустимым. Для этих случаев развиты способы выбора возможных направлений дальнейшего поиска. При этом задача поиска рассматривается в следующей постановке:

максимизировать функцию

$$M(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

при условии, что

$$H_j(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq 0 \quad (j=1, 2, \dots, m),$$

$$X_i \geq 0, \quad (i=1, 2, \dots, n).$$

(A)

Задача A удовлетворяет известным допущениям, свойственным градиентным методам как для функции M , так и для функции H_j . Возможные направления поиска классифицируются так [3, 4]. Допустимым называется направление, движение по которому на бесконечно малый шаг не выводит за пределы области поиска. Подходящим допустимым называется допустимое направление, которое приводит к возрастанию величины M . Наилучшим подходящим допустимым называется подходящее допустимое направление, единичный вектор которого имеет максимальную проекцию в направлении $\text{grad } M$. Способ

определения наилучших подходящих допустимых направлений, иначе называемый проекционным градиентным методом, изложен в [5]. Направление поиска при этом представляется вектором

$$\bar{U}_{gr} = \text{grad } M - \sum_{r=1}^l z_r \text{grad } H_r, \quad (1)$$

где $l \leq m$ — число ограничений H_r , препятствующих движению вдоль $\text{grad } M$.

Определение коэффициентов z_r требует совместного решения l уравнений с коэффициентами в виде частных производных, что приводит к значительным вычислительным операциям.

Примером определения допустимых направлений является способ зигзагообразного движения вдоль границы [1], пригодный для случая выпуклой области поиска. Здесь допустимое направление представляется вектором

$$\bar{U}_k = \bar{H}_k = - \sum_{r=1}^l \text{grad } H_r. \quad (2)$$

Определение $\bar{U}_k$ требует минимального по сравнению с $\bar{U}_{gr}$ объема вычислений, зато число шагов в процессе поиска по сравнению с предыдущим методом будет больше. Поэтому длительность поиска зависит не только от метода поиска, но и от конкретного содержания задачи A и способа технической реализации ее решения. Возможны ситуации, когда наиболее эффективным окажется поиск вдоль подходящих допустимых направлений. Ниже излагается способ определения подходящих допустимых направлений, занимающий с вычислительной точки зрения промежуточное положение между указанными выше методами.

Подходящее допустимое направление представим вектором

$$\bar{U}_{ag} = \text{grad } M + z \bar{H}_0, \quad (3)$$

где $\bar{H}_0$ — определяется выражением (2).

Коэффициент z надо выбрать таким образом, чтобы удовлетворить условиям допустимости и одновременно обеспечить возрастание значения функции M вдоль направления $\bar{U}_{ag}$. Условия допустимости требуют, чтобы $\bar{U}_{ag}$ не имел положительных составляющих вдоль нормали ни к одной поверхности ограничений H_r , содержащей точку R , в которой выбирается направление поиска [3, 4]. Направление нормали к поверхности ограничения в точке R совпадает с направлением $\text{grad } H_r$ в этой точке.

Пользуясь правилами векторного анализа, условия допустимости представляются так

$$(\bar{U}_{ag}, \text{grad } H_r) \leq 0, \quad (r = 1, 2, \dots, l). \quad (4)$$

С помощью (3) условия (4) преобразуются к виду

$$(\text{grad } M, \text{grad } H_r) + \varepsilon (H_0, \text{grad } H_r) \leq 0, \quad (r = 1, 2, \dots, l). \quad (5)$$

Для функций H_r , препятствующих движению вдоль $\text{grad } M$, угол между нормалью функции H_r и $\text{grad } M$ не превышает 90° , т. е.

$$(\text{grad } M, \text{grad } H_r) > 0, \quad (r = 1, 2, \dots, l). \quad (6)$$

Неравенства (6) показывают, что первые слагаемые в (5) всегда больше нуля. Следовательно, чтобы $\bar{U}_{ng}$ был допустимым вектором, необходимо выполнение условий:

$$\varepsilon (H_0, \text{grad } H_r) < 0. \quad (7)$$

$$(\text{grad } M, \text{grad } H_r) < |\varepsilon (H_0, \text{grad } H_r)|. \quad (8)$$

Направление $\bar{U}_{ng}$ обеспечит возрастание значений функции M , если угол между векторами $\bar{U}_{ng}$ и $\text{grad } M$ меньше 90° , т. е. $\bar{U}_{ng}$ имеет положительную проекцию в направлении $\text{grad } M$, что выражается условием

$$(\bar{U}_{ng}, \text{grad } M) > 0. \quad (9)$$

С учетом (3) условие (9) приводится к виду

$$(\text{grad } M)^2 + \varepsilon (\bar{H}_0, \text{grad } M) > 0. \quad (10)$$

С помощью (2) легко показать, что

$$(H_0, \text{grad } M) = - \sum_{r=1}^l (\text{grad } H_r, \text{grad } M). \quad (11)$$

С учетом (6) и (11) условие (10) преобразуется следующим образом:

$$(\text{grad } M)^2 > |\varepsilon (H_0, \text{grad } M)|. \quad (12)$$

Неравенства (7), (8) и (12) определяют возможности выбора коэффициента ε . Исходя из (8) видно, что

$$\varepsilon_{\min} > \frac{(\text{grad } M, \text{grad } H_r)}{|(H_0, \text{grad } H_r)|}, \quad (r = 1, 2, \dots, l). \quad (13)$$

а (12) показывает, что

$$\varepsilon_{\max} < \frac{(\text{grad } M)^2}{|(H_0, \text{grad } M)|}. \quad (14)$$

Величина ε должна выбираться в пределах, определяемых (13) и (14), если, конечно, последние совместимы, т. е. $\varepsilon_{\max} > \varepsilon_{\min}$. Меньшие значения ε являются более предпочтительными (при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем $\bar{U}_{ng} \rightarrow \text{grad } M$), поэтому ε будем определять из условий (13). Так как последние являются нестрогими, то возможна замена неравенств равенствами, т. е.

$$\varepsilon_r = \frac{(\text{grad } M, \text{grad } H_r)}{|(H_0, \text{grad } H_r)|}, \quad (r = 1, 2, \dots, l) \quad (15)$$

или же

$$\alpha_r = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\partial M}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial X_i}}{\left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial H_0}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial H_r}{\partial X_i} \right|} \quad (r = 1, 2, \dots, l), \quad (16)$$

где

$$\frac{\partial H_0}{\partial X_i} = - \sum_{r=1}^l \frac{\partial H_r}{\partial X_i}. \quad (17)$$

Пользуясь соотношениями (16), можно определить l независимых значений α_r , наибольший из которых удовлетворяет одновременно всем неравенствам (13) и принимается в качестве коэффициента α для определения $\bar{U}_{ng}$. Таким образом, значительно уменьшается объем вычислений при определении $\bar{U}_{ng}$. Если полученный коэффициент α не удовлетворяет (14), т. е. (13) и (14) несовместимы, то это значит, что в исходной точке R не существует подходящих допустимых направлений, определяемых выражением (3). Анализ зигзагообразного процесса поиска [1] показывает, что для каждой пары последовательных шагов (вдоль $U_g = \bar{H}_0$ и вдоль $\text{grad } M$), ведущих к увеличению значения функции M , существует в исходной точке хотя бы один вектор $\bar{U}_{ng}$. И только в точке локального максимума, когда векторы $\text{grad } M$ и $\bar{H}_0$ коллинеарны и противоположно направлены [1], нельзя построить вектор $\bar{U}_{ng}$, имеющий положительную проекцию на направление $\text{grad } M$. Таким образом для выпуклой области поиска несовместимость (13) и (14) означает, что точка R является точкой локального максимума. В случае, когда $|\bar{U}_{ng}|$ равен нулю, что означает коллинеарность и противоположную направленность $\text{grad } M$ и $\bar{H}_0$, точка R также будет локальным максимумом.

Условия окончания поиска, когда локальный максимум находится внутри области и движение происходит вдоль $\text{grad } M$, общезвестны.

МАИ им. С. Орджоникидзе

Поступило 9.I.1968.

Զ. Ա. ԱՎԵՏԻՍՅԱՆ

ԽՍՀՄ-ԻՈՒՐԻ ՓԵՏՏՈՒՄԸ ՀԱՐԱՐԱՎՈՐ ՈՐԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ
ԵՐԿԱՅՆՈՒԹՅԱՄԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. մ.

Թույլատրելի տիրույթին վրադրված անհավասարությունների տիրույթի սահմանափակման զեպրում անհրաժեշտ է գաղտնում դրադիկենտային մեթոդների անմիջական կիրառումը լուծվող մաթեմատիկական խնդիրների համար: Թույլատրելի

տիրույթի սահմանում փնտրման ուղղությունները ապրեր են մաքսիմիզացվող ֆունկցիայի գրադիենտից և սկսոր է բավարարեն ինուլատրելիության պայմաններին՝ այսինքն փնտրման ինուլատրելի տիրույթ դուրս դալուն:

Հոդվածում սահմանային կետերի համար դիտվում են փնտրման այնպիսի ուղղություններ, որոնք միաժամանակ ուղաճովում են մաքսիմիզացվող ֆունկցիայի աճը: Հաշվողական տեսակետից սույն ուղղությունների որոշման հղանակը միջակա դիրք է զբաղում սլոյեկցիոն գրադիենտային մեթոդի և ինուլատրելի ուղղությունների մեթոդի միջև:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Фельдбаум А. А.* Вычислительные устройства в автоматических системах. Физматгиз, 1959.
2. *Draper C. S., Li J. T.* Principles of optimizing control systems and an application to the internal combustion engine. ASME, New York, September, 1951.
3. *Зойтендейк Г.* Методы возможных направлений, ИЛ, 1963.
4. *Ленкин Иж. Б.* Математическое программирование и электрические цепи, ИЛ, 1961.
5. *Мозговая Э. А.* Об одном методе поиска минимума функции при наличии ограничений. Журн. «Автоматика и телемеханика», № 12, 1962.