ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXI, № 6, 1968 Серия технических наук

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Т. А. НАЛЧАДЖЯН

СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Существующие методы изучения поведения автоматических систем при случайных параметрах позволяют определить поведение систем при заранее заданных определенных номиналах и програм управления, которые являются исходными и не подлежат изменению.

Недавно был предложен метод повышения эффективности случайных процессов при помощи оптимального изменения настроек и програм [1]. Этот метод основывается на использовании вероятностных характеристик параметров процесса и элементов автоматических систем.

Одним из основных методов повышения точности и тем самым повышения эффективности работы систем является метод уменьшения дисперсий, который связан с конструктивными изменениями. А установка той или другой настройки обычно не связана с конструкцией. Идею метода статистической оптимизации можно пояснить на следующем примере. Пусть имеется определенное количество деталей, изготовленных на каком-нибудь автоматическом станке. Предположим, что в результате статистического исследования был определен закон распределения отклонений размеров деталей от заданного номинального значения диаметра d, и этот закон нормален с среднеквадратическим отклонением σ

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-d)^2}{2\sigma^2}}. \tag{1}$$

На рис. 1а приведена кривая распределения вероятностей (1) и пределы допусков $a_{1з}$ и и $a_{2з}$. Детали, размеры (случайные величины) которых попадают в I область, считаются годными, а в области II и III—негодными. В более общем случае принимаем, что имеется несимметричное поле допусков

$$d - a_{1з} \leqslant x \leqslant d + a_{2з}. \tag{2}$$

Для удобства рассуждения пользуемся центрированными, относительными случайными величинами (относительно среднеквадратической ошибке σ, например, $x = \frac{x_{изм}}{\sigma}$, $a_1 = \frac{a_{1изм}}{\sigma}$ и т. д.). Тогда нормальный закон и поле допусков примут вид:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\,e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad (1')$$

$$a_1\leqslant x\leqslant a_2. \qquad (2')$$

Известно, что вероятности попадания случайного диаметра в I, II и III области соответственно равны:

$$P_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{a_1}^{a_2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx;\quad P_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{-\infty}^{a_1}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx;$$

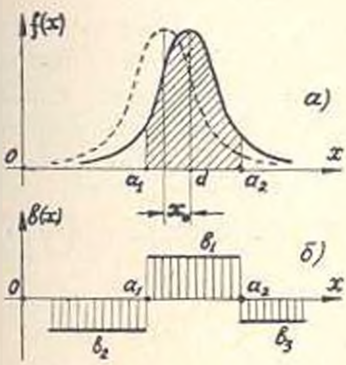

Рис. 1.

$$P_3=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int\limits_{a_2}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx. \qquad (3)$$

Следуя [1] в качестве критерия оптимизации принимаем максимизацию разностей „желательных" и „нежелательных" вероятностей, т. е. максимум выражения

$$P_1-P_2-P_3. \qquad (4)$$

Обозначая разность вероятностей (4) через ΔP, получим

$$\Delta P=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left[\int\limits_{a_1}^{a_2}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx-\int\limits_{-\infty}^{a_1}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx-\int\limits_{a_2}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right]. \qquad (5)$$

Смещая центр распределения на некоторую величину x_0 (рис. 1а), получим следующее выражение для ΔP

$$\Delta P(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left[\int\limits_{a_1}^{a_2}e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2}}\,dx-\int\limits_{-\infty}^{a_1}e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2}}\,dx-\int\limits_{a_2}^{\infty}e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2}}\,dx\right]. \qquad (6)$$

Обычно разные сорта выпускаемой продукции имеют разные стоимости, причем относительные стоимости годных и забракованных деталей могут сильно отличаться друг от друга. Принимаем, что стоимость единицы годной продукции равна b_1, а негодной продукции — b_2 и b_3, причем последние могут быть и отрицательными. Принятое дискретное поле стоимостей приведено на рис. 1б. Считаем, что b_1, b_2 и b_3 постоянные и отнесены к σ. Умножая отдельные вероятности на соответствующие „стоимости", получим:

$$I(x_0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\left[b_1\int\limits_{a_1+x_0}^{a_2+x_0}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx-b_2\int\limits_{-\infty}^{a_1+x_0}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx-b_3\int\limits_{a_2+x_0}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right]. \qquad (7)$$

Величина $J(x_0)$ достигает своего экстремального значения, когда

$$b_1 \int_{a_1}^{a_2} (x+x_0)\, e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2}}\, dx = b_2 \int_{-\infty}^{a_1} (x+x_0)\, e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2}}\, dx +$$

$$+\; b_3 \int_{a_2}^{\infty} (x+x_0)\, e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2}}\, dx. \qquad (8)$$

После интегрирования и преобразований получим

$$x_0 = \frac{1}{a_1 - a_2} \ln \frac{b_1 + b_2}{b_1 + b_3} - \frac{a_1 - a_2}{2}. \qquad (9)$$

Откуда при заданных значениях a_1, a_2, b_1, b_2 и b_3 можно определить ту величину смещения x_0, при которой $I(x_0)$ достигает экстремума. Обычно по технологическим соображениям сразу можно определить характер экстремума (максимум или минимум), но при необходимости можно провести исследования известными методами математического анализа.

В частном случае, когда все полосы допусков равноценны, т. е. когда $b_1 = b_2 = b_3$, получим

$$x_0 = -\frac{a_1 + a_2}{2},$$

что означает симметричность выбора установки номинала в поле допусков. А если одновременно имеется симметричное поле допусков, т. е. $|a_1| = |a_2| = |a|$, получается $x_0 = 0$. В другом частном случае, когда имеется некоторое дискретное поле стоимостей b_1, b_2, b_3, но симметричное поле допусков получается

$$x_0 = -\frac{1}{2a} \ln \frac{b_1 + b_2}{b_1 + b_3}.$$

При нормальном распределении значение x_0 обычно лежит в пределах $-3 < x_0 < 3$. Значения x_0, выходящие за эти пределы, представляют лишь теоретический интерес и при решении практических задач их можно не принимать во внимание.

Если случайная величина x распределена не по нормальному, а по любому другому модальному закону $f(x)$, то получим:

$$\sum_{i=1}^{k} b_i \int_{a_i} \frac{\partial f(x+x_0)}{\partial x_0}\, dx = \sum_{i=k+1}^{n} b_i \int_{a_i} \frac{\partial f(x+x_0)}{\partial x_0}\, dx. \qquad (10)$$

Теперь вместо ступенчатой функции стоимости b_i рассмотрим любую непрерывную (в определенных пределах) функцию $b(x)$. Такую функцию можно, например, получить из дискретных b_i способом наименьших квадратов. Тогда оптимальное значение номинальной настройки, согласно [1], можно определить, исследуя максимум выражения

$$\varphi(x_0) = \int_{a_1}^{a_2} b(x) \cdot f(x+x_0)\, dx, \qquad (11)$$

где $f(x)$ — плотность распределения вероятностей. Значение x_0 при этом определяется из условия

$$\int_{a_1}^{a_2} b(x) \frac{\partial f(x+x_0)}{\partial x_0} dx = 0, \qquad (12)$$

если известны a_1, a_2 и функции $b(x)$ и $f(x)$.

При нормальном законе распределения условие (12) принимает вид:

$$\int_{a_1}^{a_2} b(x) \cdot (x+x_0)\, e^{-\frac{(x+x_0)^2}{2}} dx = 0. \qquad (13)$$

Рассмотрим более сложный случай, когда функция $b(x)$ зависит от некоторого параметра, например, от времени t, т. е. имеется $b(x, t)$. Такая функция может учесть изменения во времени ширины областей, стоимости каждого элемента области и т. д. Тогда величина смещения x_0 также будет функцией времени $x_0(t)$. При этом необходимо исследовать выражение

$$\varphi[x_0(t)] = \int_{a_1}^{a_2} b(x, t) \cdot f[x + x_0(t)]\, dx \qquad (14)$$

в интервале времени от t_1 до t_2. Здесь функция $x_0(t)$ — искомая оптимальная программа изменения настройки во времени, обеспечивающая экстремальную эффективность исследуемого процесса в принятом нами выше смысле. Максимизация эффективности достигается тогда, когда достигает максимума следующий функционал:

$$I[x_0(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \varphi[x_0(t)]\, dt. \qquad (15)$$

Подставляя (14) в (15), получим:

$$I[x_0(t)] = \int_{t_1}^{t_2} \int_{a_1}^{a_2} b(x, t) \cdot f[x + x_0(t)]\, dx\, dt. \qquad (16)$$

Определение функции $x_0(t)$ сводится к решению вариационной задачи. Для рассматриваемого случая подынтегральная функция не зависит от скорости изменения оптимальной программы $\dot{x}_0(t)$ и поэтому дифференциальное уравнение Эйлера принимает следующий более простой вид

$$\frac{d\varphi[x_0(t)]}{dx_0(t)} = 0, \qquad (17)$$

решение $x_0(t)$ которого есть искомая оптимальная программа. Оптимальную программу можно определить также прямыми методами вариационного исчисления.

Выше были изложены некоторые вопросы определения оптимальной настройки и оптимальной программы управления процесса с учетом вероятностных характеристик исследуемых процессов.

Применение этого метода можно рекомендовать для большого числа различных типов существующих автоматических и неавтоматических процессов и систем. Этот метод особенно эффективен при оптимизации непрерывных процессов, входные и выходные параметры которых в большинстве случаев вероятностны по своему характеру.

При практическом использовании метода статистической оптимизации, исследование процессов осуществляется на самом объекте (взамен макетов и моделей) и при определении вероятностных характеристик нет необходимости возмущать существующий режим, что широко принято при других методах исследования. Кроме того, необходимо отметить, что оптимизация по этому методу не требует затрат, что почти всегда имеет место при оптимизации процессов другими методами.

НИИ Автоматики Поступило 28.I.1967.

Թ. Ա. ՆԱԼՉԱՋՅԱՆ

ԱՎՏՈՄԱՏ ՍԻՍՏԵՄՆԵՐԻ ՎԻՃԱԿԱԳՐԱԿԱՆ ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՈՒՄԸ

Ամփոփում

Հոդվածում քննարկվում են սերիական արտադրանք թողարկող ավտոմատ և ոչ ավտոմատ սիստեմների տնտեսական շահավետության բարձրացման որոշ հարցեր: Առաջարկված են հաշվային բանաձևեր, որոնց միջոցով հնարավոր է ընտրել հետազոտվող արտադրական պրոցեսի ղեկավարման այնպիսի նոր պարամետրեր կամ ծրագրեր, որոնց դեպքում առանց լրացուցիչ ծախսերի և կոնստրուկտիվ փոփոխությունների սիստեմից ստացվում է առավելագույն տնտեսական էֆեկտ: Նշվում է, որ օպտիմալացումը կիրառելի է բազմաթիվ արտադրական պրոցեսների համար, որոնց մուտքի և ելքի պարամետրերն ունեն հավանականական բնութագրեր:

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свечарник Д. В.* Задача об оптимуме номинала при вероятностных расчетах. Труды института машиноведения АН СССР, вып. 10. 1957.